＜新型母関数の公式、ξ(s)の非自明な零点における構造　その６＞

今回は、前回見たξ（ｓ）式[1]から、ξ(s)の非自明な零点に関し、その構造や形を超簡単モデルでもって考察のはしりのようなことをした。また、（その１９６）での非自明零点を生み出す二つの無限次方程式における考察を再び行った。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■ξ(s)式[1]

$$(1-1/2^{s-1})\cdot\Gamma(s)\xi(s)$$
$$=2^{-s}\ \{\Gamma(s+1)\xi(s+1)/(1!\cdot2^1)\ +\ \Gamma(s+2)\xi(s+2)/(2!\cdot2^2)$$
$$+\ \Gamma(s+3)\xi(s+3)/(3!\cdot2^3)\ +\ \Gamma(s+4)\xi(s+4)/(4!\cdot2^4)$$
$$+\ \Gamma(s+5)\xi(s+5)/(5!\cdot2^5)\ +\ \Gamma(s+6)\xi(s+6)/(6!\cdot2^6)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

リーマン・ゼータξ(s)の無数にある非自明な零点を1/2+ｉ・α1の一番目の零点をA1とすると、A1は次のようになる。α1＝14.134725141734・・である。
A1＝1/2+ｉ・α1

ξ(s)は無限にたくさんの零点（非自明な零点）をもつが、このA1一つしか零点をもたないとしてみよう（注記）。

すると、ξ（ｓ）式[1]より、ガンマ関数Γ(s)は零点を持たないことから、以下のようになっていると考えられる。K1,k2,k3,k4,・・は、ｓの関数。

（1-s/A1）＝k1{1-s/(A1+1)}+ k2{1-s/(A1+2)}+ k3{1-s/(A1+3)}+ k4{1-s/(A1+4)}+・・

（注記）実際はA1＝1/2+ｉ・α1だけでなく、実軸に対称に、A1´＝1/2-ｉ・α1も解となるのだが。

さて、すこし話は変わって、ξ(s)リーマン予想と同値の命題である（その１９６）の予想A-3での“鏡映”の関係を再び見ておきたい（若干改良した）。
（http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page132.htm「ヘール・ボップ彗星　その１」参照）

予想A-3とは、次のものである。

予想 A-3 （リーマン予想と同値）

c を 0＜c＜1 の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。
この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が 1/2 のときのみであろう。

$$(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1+\pi/4)-(1/2^c)\cdot\cos(x\cdot\log 2+\pi/4)$$
$$+(1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3+\pi/4)-(1/4^c)\cdot\cos(x\cdot\log 4+\pi/4)$$
$$+(1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5+\pi/4)-(1/6^c)\cdot\cos(x\cdot\log 6+\pi/4)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0$$

$$(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1-\pi/4)-(1/2^c)\cdot\cos(x\cdot\log 2-\pi/4)$$
$$+(1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3-\pi/4)-(1/4^c)\cdot\cos(x\cdot\log 4-\pi/4)$$
$$+(1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5-\pi/4)-(1/6^c)\cdot\cos(x\cdot\log 6-\pi/4)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0$$

私は長い間気づかなかったのだが、上記二式は、xy 実平面の y 軸に対し鏡映の関係になっていてとても重要である。

予想 A-3 での下側の方程式の x を-x に置き換えると、上側の方程式に一致する。上側の方程式の左辺を $f_1(x)$、下側の方程式の左辺を $f_2(x)$ とおくと、$f_1(x)=f_2(-x)$ となる。逆もまたしかり。これは、グラフで考えれば、$y=f_1(x)$ と $y=f_2(x)$ が y 軸に対して対称（鏡映）になっている。よって、両関数のガラクタ解も y 軸に対し対称的に存在することになる。

すなわち、$f_1(x)$ と $f_2(x)$ を $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$ の解で因数分解すると、次のようになる。

$$f_1(x)=\{(1-x^2/\alpha_1^2)(1-x^2/\alpha_2^2)(1-x^2/\alpha_3^2)\cdot\cdot\}\{(1-x/\beta_1)(1-x/\beta_2)(1-x/\beta_3)\cdot\cdot\}$$
$$f_2(x)=\{(1-x^2/\alpha_1^2)(1-x^2/\alpha_2^2)(1-x^2/\alpha_3^2)\cdot\cdot\}\{(1+x/\beta_1)(1+x/\beta_2)(1+x/\beta_3)\cdot\cdot\}$$

ここで α_1、α_2、α_3・・は $\zeta(s)$ の非自明な零点 $1/2+i\cdot\alpha_n$ の α_n（実数）である。β_1、β_2、β_3・・がガラクタ解（実数）である。$f_1(x)=0$、$f_2(x)=0$ を同時に満足する解が α_n であり、同時には満足しない解がガラクタ解である。$f_1(x)=f_2(-x)$ となることを確認いただきたい。

この鏡映の関係に気づく前は、ガラクタ解は２種類存在した。
（その１９６）の予想 A-1 を再び見よう。

予想 A-1 （ζ(s)リーマン予想と同値）

c を 0＜c＜1 の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。
この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が 1/2 のときのみであろう。

$\cos(x\cdot\log 1)/1^c - \cos(x\cdot\log 2)/2^c + \cos(x\cdot\log 3)/3^c - \cos(x\cdot\log 4)/4^c + \cdots = 0$

$\sin(x\cdot\log 1)/1^c - \sin(x\cdot\log 2)/2^c + \sin(x\cdot\log 3)/3^c - \sin(x\cdot\log 4)/4^c + \cdots = 0$

この予想 A-1 の二式の左辺を $g_1(x)$, $g_2(x)$ として、$g_1(x)=0$, $g_2(x)=0$ の解で因数分解すると次のようになる。

$g_1(x)=\{(1-x^2/\alpha_1^2)(1-x^2/\alpha_2^2)(1-x^2/\alpha_3^2)\cdots\}\{(1-x^2/a_1^2)(1-x^2/a_2^2)(1-x^2/a_3^2)\cdots\}$
$g_2(x)=\{(1-x^2/\alpha_1^2)(1-x^2/\alpha_2^2)(1-x^2/\alpha_3^2)\cdots\{x(1-x^2/b_1^2)(1-x^2/b_2^2)(1-x^2/b_3^2)\cdots\}$

このように a_n と b_n の２種類のガラクタ解が存在したのである。２種類もあってややこしかったのだが、予想 A-3 での鏡映の関係を発見し、ガラクタ解は１種類になり（β_n だけになった）、零点周辺の構造はかなりすっきりした。

ただし、すっきりしたといってもまだガラクタ解はあるわけで、リーマン予想が難解であることに変わりがない。

$g_1(x)$, $g_2(x)$ を引き算、足し算することによって、予想 A-3 の式（上側、下側）が出る。引き算、足し算すると以下のようになるが、この両式はまさに鏡映の関係になっている。x を-x に置き換えると、互いに入れ替わることが見てとれる。

$g_1(x)-g_2(x)=\{(1-x^2/\alpha_1^2)(1-x^2/\alpha_2^2)\cdots\}[\{(1-x^2/a_1^2)(1-x^2/a_2^2)\cdots\}-\{x(1-x^2/b_1^2)(1-x^2/b_2^2)\cdots\}]$
$g_1(x)+g_2(x)=\{(1-x^2/\alpha_1^2)(1-x^2/\alpha_2^2)\cdots\}[\{(1-x^2/a_1^2)(1-x^2/a_2^2)\cdots\}+\{x(1-x^2/b_1^2)(1-x^2/b_2^2)\cdots\}]$

なお、この $g_1(x)-g_2(x)$, $g_1(x)+g_2(x)$ は、上方の $f_1(x)$, $f_2(x)$ に対応している。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ζ(s)のリーマン予想の本質は、三角関数を無限個足し合わせた方程式の零点（非自明な零点）を求めることに他ならない。その因数分解がうまくできれば、リーマン予想が解けることになるはずである。

三角関数が１個だったら、因数分解は簡単である。例えば、sinx の場合、オイラーが行ったように、次のようになる。リーマン予想は、これに似ている。

$\sin x = x(1-x^2/\pi^2)(1-x^2/4\pi^2)(1-x^2/9\pi^2)(1-x^2/16\pi^2)\cdots$

●高瀬正仁氏の数学史のサイトを継続して、読んでいっている。
数学を語る93　虚数の魔力　http://reuler.blog108.fc2.com/blog-category-32-1.html

上の「数学を語る93　虚数の魔力」で、コーシーの虚数に対する態度が書いてあって、それが面白い。引用したい。

****
・・・
虚数の存在に関する問いは数学に課せられた根本問題です。代数方程式論の「不可能の証明」を語るには複素数の作る数域を設定しなければなりませんが、虚数の存在に確信がもてなければ複素数を自由に考えることはできません。それで虚数の存在の根拠をどこに求めたらよいのかという問題が発生するのですが、答は数学という学問それ自体の中にあります。ライプニッツ、ベルヌーイ兄弟（兄のヤコブと弟のヨハン）、オイラー、ガウス、それにアーベル等々、数学の創造に携わった人たちは虚数に対して強固な実在感を抱いていて、存在を疑いませんでした。彼らはみなそれぞれに虚数の存在を実感するに足る数学的事象に直面していましたの、確信は決して揺らぎませんでした。数や関数など、数学的対象の存在を深いところで支えているのは、数学の創造者の数学的体験です。
　もっとも数学者もいろいろですから、正面から虚数を相手にして、虚数の土壌から大きな数学的果実を摘みながら、なおかつ虚数に対する実在感を徹底的に拒絶しようとした人もいます。フランスの数学者コーシーがそうで、コーシーにとって複素数は単なる形式以外の何物でもなく、ただ加減乗除の計算規則だけを定めました。数学という学問はひとつとしても、数学に寄せる考え方は人それぞれです。
****

　なんとも面白い話で、本当に驚いてしまう。コーシー(1789-1857)は、複素関数論の創始者の一人といえるが、その本人が虚数を拒絶していたというのは、どういうことあろうか。
　このことは、高瀬氏は他のページでもいろいろと指摘しているのだが、なんでも天文学などの要請から、その時代は難しい実定積分の計算をすることが大きな課題としてあり、それまでの方法では簡単に求められなかったが、コーシーは複素数を便利な道具として使うことで、簡単に実定積分を求める方法（定理）をいくつも発見した。しかし、コーシーは複素数を数として見ていなかったようで、なにか“便利はもの“という感じで使っていたという話である。

　ちなみに、ルジャンドルも、虚数を使うのに抵抗を感じていた・・と別の箇所で書いてある

　虚数は当時はまだ新しいものであり、数学者に十分、浸透していなかったということであろう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.7.11　杉岡幹生

参考文献
・「数学の夢　素数からのひろがり」（黒川信重著、岩波書店）