＜ 新型母関数の公式、ガンマ関数Γ(s)はゼータのコンパニオン　その５＞

（その３）では新型母関数を使いゼータの一般式（公式）を導出した。それらを眺めていて、私は、あることに気づいた。気づいたといっても、たいしたことではないのだが、わずかな変形で世にも美しい公式になるのである。両辺にガンマ関数Γ(s)を掛けるだけで、以下のようになった。

“Γ(s)ζ(s)” や “ζ(s)L(s)” がかたまりで出ている。前者を青で、後者を赤で表した。ここで、Γ(s)はガンマ関数、ζ(s)はリーマン・ゼータζ(s)、L(s)は次である。

$L(s)=1-1/3^s+1/5^s-1/7^s+1/9^s-1/11^s+\cdots$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■L(s)式

$$2^s\cdot\Gamma(s)L(s)$$
$$=(1-1/2^{s-1})\Gamma(s)\zeta(s)/(0!\cdot 2^0)+(1-1/2^s)\Gamma(s+1)\zeta(s+1)/(1!\cdot 2^1)$$
$$+(1-1/2^{s+1})\Gamma(s+2)\zeta(s+2)/(2!\cdot 2^2)+(1-1/2^{s+2})\Gamma(s+3)\zeta(s+3)/(3!\cdot 2^3)$$
$$+(1-1/2^{s+3})\Gamma(s+4)\zeta(s+4)/(4!\cdot 2^4)+(1-1/2^{s+4})\Gamma(s+5)\zeta(s+5)/(5!\cdot 2^5)$$
$$\cdots\cdots$$

■ζ(s)式[1]

$$(1-1/2^{s-1})\cdot\Gamma(s)\zeta(s)$$
$$=2^{-s}\{\Gamma(s+1)\zeta(s+1)/(1!\cdot 2^1)+\Gamma(s+2)\zeta(s+2)/(2!\cdot 2^2)$$
$$+\Gamma(s+3)\zeta(s+3)/(3!\cdot 2^3)+\Gamma(s+4)\zeta(s+4)/(4!\cdot 2^4)$$
$$+\Gamma(s+5)\zeta(s+5)/(5!\cdot 2^5)+\Gamma(s+6)\zeta(s+6)/(6!\cdot 2^6)$$
$$\cdots\cdots\}$$

■ζ(s)式[2]

$$(1-1/2^{s-1})\cdot\Gamma(s)\zeta(s)$$
$$=2^s\{\Gamma(s)L(s)/0!-\Gamma(s+1)L(s+1)/1!$$
$$+\Gamma(s+2)L(s+2)/2!-\Gamma(s+3)L(s+3)/3!$$
$$+\Gamma(s+4)L(s+4)/4!-\Gamma(s+5)L(s+5)/5!$$
$$\cdots\cdots\}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように “Γ(s)ζ(s)” や “ζ(s)L(s)” がセット（かたまり）になっていて異様にきれいである。なんともふしぎな感じが漂っていて、眺めていて飽きない。

ゼータの専門家・黒川氏は、「数学の夢　素数からのひろがり」（黒川信重著、岩波書店）」で「ガンマはゼータの仲間（コンパニオン）」と述べているが、上を見ると、まさにΓ(s)はゼータのコンパニオンである！

黒川氏は関数等式をΓ(s)を用いて対称的に（少し人工的に？）変形した式でそのように述べている(p.111)のだが、ちょっと無理やりの感じがあって「まあそうなのかな」くらいにしか思っていなかった。しかし上式を見たら、これはもうコンパニオンとしかいいようがない。旧母関数では、こんなにΓ(s)を意識する式を出したことはなかった。

L(s)式のｓに1を代入すると、次を得る。

$$L(1)=(1/2)\log 2+(1-1/2^1)\cdot\zeta(2)/2^2+(1-1/2^2)\cdot\zeta(3)/2^3+(1-1/2^3)\cdot\zeta(4)/2^4+(1-1/2^4)\cdot\zeta(5)/2^5+(1-1/2^5)\cdot\zeta(6)/2^6+(1-1/2^6)\cdot\zeta(7)/2^7+\cdots \qquad \text{-----①}$$

L(s)式のｓに1を代入したとき、第一項は$(1-1/2^0)\zeta(1)$となって困惑するが、テイラーシステムでは

$$(1-1/2^0)\zeta(1)=\log 2$$

となる。公式を使ったときだけ“こうなる”と覚えていただきたい。公式を使わずに直接出すときは、自然にlog2が出るので心配いらない。“log2は極ζ(1)の化身である”と言えそうだ。

公式から、さらに気づくことはないだろうか。

じつは、ζ(s)式[1]の左辺が、L(s)式の右辺の第一項と等しいと分かる！

ζ(s)式[1]の左辺をL(s)式の右辺の第一項に代入すると、また別種の一般式（公式）が得られる。その表示は略すが、その式のｓに1を代入すると、①とは違った次のL(1)式が得られる。

$$L(1)=\zeta(2)/2^2+(1+1/2^2)\cdot\zeta(3)/2^3+(1+3/2^3)\cdot\zeta(4)/2^4+(1+7/2^4)\cdot\zeta(5)/2^5+(1+15/2^5)\cdot\zeta(6)/2^6+(1+31/2^6)\cdot\zeta(7)/2^7+(1+63/2^7)\cdot\zeta(8)/2^8+\cdots \qquad \text{-----②}$$

①、②とも、Excelマクロで数値的に正しいことを確認した。右辺は急速に左辺に収束する。
②では例えば、31は$31=2^5-1$という規則、63は$63=2^6-1$という規則である。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+\cdots=\pi/4$であることは昔から知られているが、ゼータは多様な式で表現できるのである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝

● 新型母関数で、L(s)＝[L(s)の無限和]という式は出ないのだろうか。いろいろやっているが、まだ出せていない。

● ガンマ関数Γ(s)は<u>零点を持たない</u>ので、今回の公式からζ(s)やL(s)の非自明な零点の構造が<u>透けて見える</u>ようである。

これまでも示唆してきたことだが、ζ(s)の非自明な零点 1/2+i・αは、

3/2+i・α,　5/2+i・α,　7/2+i・α,　9/2+i・α,　・・

に影響を受けている。さらにL(s)の非自明な零点も、ζ(s)の非自明な零点に影響を受けている。

● Γ(s)と結合したこれらの公式は何を意味しているのか。ζ(s)とL(s)は相補的になっているようだ。ζ(s)のリーマン予想が解ければ、L(s)リーマン予想も解けるのだろう。逆もまたしかり。

●高瀬正仁氏の数学史のサイトを継続して、読んでいっている。

リーマンを語る 32.　ヤコビの手紙　http://reuler.blog108.fc2.com/blog-category-5-7.html

面白いと思った箇所を紹介したいのだが、上に出ているヤコビの次の言葉はコーシーとガウスとディリクレの性格？を明け透けに述べていて面白い。

****

・・・

〈私でもなく、コーシーでもなく、ガウスでもなく、ディリクレだけが完全に厳密な証明とは何かを知っています。われわれはそれを彼から学んで、はじめて知るのです。ガウスが何かをいうとき、彼はそれを証明したのです。コーシーが何かをいうとき、その反対のことも同様に正しそうです。しかし、ディリクレが何かをいうときは、それは確実なのです。私は、そんな繊細なことには関わらないのです。〉

****

これは私も聞いたことはあり、しかし表現がちょっと違っていたのだが、上はかなり正確な直訳と思われる。当時の３人への評価はそんな感じだったのだろうか。ヤコビ(1804～1851)個人の意見でもあるのだろうが、なんとなく当時の数学者間で共有されていた世評でもあるようにも思われ、面白いことである。

高瀬氏サイトで書かれたヤコビからルジャンドル(1752～1833)への手紙を読んでいると、ヤコビは楕円関数の理論でアーベル(1802～1829)と競っていた時期もあったようだが、徐々にアーベルに対しては尊敬の念をいだくようになっていったようである。

＝＝＝

2021.7.4　杉岡幹生

参考文献

・「数学の夢　素数からのひろがり」（黒川信重著、岩波書店）

・Wikipedia ガンマ関数