

＜ ζ(3/2)の導出 新型母関数でのテイラーシステム その4＞

今回は、[前回](#)示したζ(s)式[2]からζ(3/2)を導出し、すこし観察する。下記の通りである。
Γ(s)はガンマ関数である。ζ(3/2)の左辺は定数がかかったままおいた。

=====

■ ζ(s)式[2]

$$(1-1/2^{s-1}) \cdot \zeta(s)$$

$$= (2^s / \Gamma(s)) \{ \Gamma(s) L(s) / 0! - \Gamma(s+1) L(s+1) / 1! \\ + \Gamma(s+2) L(s+2) / 2! - \Gamma(s+3) L(s+3) / 3! \\ + \Gamma(s+4) L(s+4) / 4! - \Gamma(s+5) L(s+5) / 5! \\ \dots \dots \dots \}$$

$$(1-\sqrt{2}/2^2) \cdot \zeta(3/2)$$

$$= L(3/2) + \pi \{ L(1/2)/2 - 1! \cdot L(3/2)/(2! \cdot 0! \cdot 2^2) + 3! \cdot L(5/2)/(3! \cdot 1! \cdot 2^4) \\ - 5! \cdot L(7/2)/(4! \cdot 2! \cdot 2^6) + 7! \cdot L(9/2)/(5! \cdot 3! \cdot 2^8) \\ - \dots \dots \dots \}$$

=====

ζ(3/2)はこのようになった。導出過程の詳細は略すが、一般式のsに-1/2を代入してζ(-1/2)を関数等式を用いてζ(3/2)に反転させれば、上記結果を得る。Excel マクロで数値計算を行い正しいことを確認した。

左辺=1.6887611・・・

82 項まで=1.689366・・・

83 項まで=1.688167・・・

交代級数なので、真値を挟みながら収束していく。

([その2](#))で私は、新型母関数ではπが出ないと述べたが、関数等式を用いた場合はπが出ると分かった。先に述べたことは誤りであったので、訂正としたい。

15年前に旧来の母関数でζ(3/2)を導出していた。http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page118.htm
それを記すと次のようになる。

$$(1-1/(2\sqrt{2})) \cdot (1-1/\sqrt{2}) \cdot \zeta(3/2)$$

$$= \pi [(\sqrt{2}-1/2^1) \cdot \zeta(3/2) \cdot 2! / (2! \cdot 1! \cdot 2^4) \\ + (\sqrt{2}-1/2^3) \cdot \zeta(7/2) \cdot 6! / (4! \cdot 3! \cdot 2^{10}) \\ + (\sqrt{2}-1/2^5) \cdot \zeta(11/2) \cdot 10! / (6! \cdot 5! \cdot 2^{16}) \\ + (\sqrt{2}-1/2^7) \cdot \zeta(15/2) \cdot 14! / (8! \cdot 7! \cdot 2^{22}) \\ + (\sqrt{2}-1/2^9) \cdot \zeta(19/2) \cdot 18! / (10! \cdot 9! \cdot 2^{28}) \\ \dots \dots \dots]$$

当時はこの形と右辺の $\zeta(3/2)$ を左辺に集めた形のものも書いているが、上記のものだけ取り上げた。新型母関数のものと比べると旧来のものの方が収束が速いことが分かる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

● $\zeta(s)$ 式[2]から、リーマン予想を直接出すのは、難しい。

$\zeta(1/2)$ を (その1) で示したが、それはじつは $\zeta(s)$ 公式[2]の s に $1/2$ を代入しても出るものである。

ところで、 $s=1/2+i \cdot \alpha$ を $\zeta(s)$ の非自明な零点とすると、 $\zeta(s)$ 公式[2]から、 $\zeta(s)$ の非自明な零点は、 $L(1/2+i \cdot \alpha)$ 、 $L(3/2+i \cdot \alpha)$ 、 $L(5/2+i \cdot \alpha)$ 、 $L(7/2+i \cdot \alpha)$ 、 $\dots$ に関連しているといえそうである。

なお、 $\zeta(s)$ 式[2]の右辺 $\{ \}$ に掛かる外側のところは $s=1/2+i \cdot \alpha$ でゼロにならない。

● 高瀬正仁先生の数学史を続けて読んでいます。

<http://reuler.blog108.fc2.com/blog-date-200706.html>

高瀬氏は日記のように書き綴っているが、サイトであるがゆえに気楽に？本音をずばずばと書いているのがきわめて面白い。読んでみると、数学の本当に歴史は、本などの定型的な話とはだいぶちがっていることがよく分かる。埋もれて、表に出ていない驚くべき真相がじつにたくさんあるという感じである。

5次方程式の解の公式の問題に関しては、高瀬氏の指摘がやはり気になる。

<http://reuler.blog108.fc2.com/blog-category-11-14.html>

通常の一般書では、アーベルやガロアがラグランジュなどの考察にヒントを得て問題を解いたみたいな流れが普通だが、高瀬氏の指摘はまったくちがう。冒頭の「リーマンを語る 131. ラグランジュの「省察」とガウスの円周等分方程式論」はあまりに重大である！

アーベルやガロアよりはるかに先にガウスは著書で、5次方程式の解の公式は存在しないことを証明なしで明言しているわけであるが（注）、それをヒントにアーベルやガロアが、解の公式を探すという方針を大転換して、「公式なし」の結論（定理）に到達した可能性が高いと考えられる。

注記：数学者・足立恒雄氏も「ガロア理論講義」（足立恒雄著、日本評論社）で指摘していて、本シリーズのどこかで書いた。

=====

2021.6.27 杉岡幹生