＜ L(s)、ζ(s)一般式の導出　新型母関数でのテイラーシステム　その３＞

前回の最後で示唆したように今回は、新型母関数から導出できたL(s)、ζ(s)の一般式（公式）を示したい。まずそれから示すと、次となる。ζ(s)は式[1]と式[2]がある。L(s)は赤で、ζ(s)は青で示した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■L(s)式

$$
\begin{aligned}
2^s\cdot L(s) =& (1/\Gamma(s))\{(1-1/2^{s-1})\Gamma(s)\zeta(s)/(0!\cdot 2^0) + (1-1/2^s)\Gamma(s+1)\zeta(s+1)/(1!\cdot 2^1) \\
&+ (1-1/2^{s+1})\Gamma(s+2)\zeta(s+2)/(2!\cdot 2^2) + (1-1/2^{s+2})\Gamma(s+3)\zeta(s+3)/(3!\cdot 2^3) \\
&+ (1-1/2^{s+3})\Gamma(s+4)\zeta(s+4)/(4!\cdot 2^4) + (1-1/2^{s+4})\Gamma(s+5)\zeta(s+5)/(5!\cdot 2^5) \\
&\cdots\cdots\cdots \}
\end{aligned}
$$

■ζ(s)式[1]

$$
\begin{aligned}
(1-1/2^{s-1})\cdot\zeta(s) =& (2^{-s}/\Gamma(s))\{\Gamma(s+1)\zeta(s+1)/(1!\cdot 2^1) + \Gamma(s+2)\zeta(s+2)/(2!\cdot 2^2) \\
&+ \Gamma(s+3)\zeta(s+3)/(3!\cdot 2^3) + \Gamma(s+4)\zeta(s+4)/(4!\cdot 2^4) \\
&+ \Gamma(s+5)\zeta(s+5)/(5!\cdot 2^5) + \Gamma(s+6)\zeta(s+6)/(6!\cdot 2^6) \\
&\cdots\cdots\cdots \}
\end{aligned}
$$

■ζ(s)式[2]

$$
\begin{aligned}
(1-1/2^{s-1})\cdot\zeta(s) =& (2^s/\Gamma(s))\{\Gamma(s)L(s)/0! - \Gamma(s+1)L(s+1)/1! \\
&+ \Gamma(s+2)L(s+2)/2! - \Gamma(s+3)L(s+3)/3! \\
&+ \Gamma(s+4)L(s+4)/4! - \Gamma(s+5)L(s+5)/5! \\
&\cdots\cdots\cdots \}
\end{aligned}
$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これまで示した方法を用いて、このように一般式（公式）が簡単に導出できる。きれいな形をしている。ゼータはゼータの無限和で表されると分かる。

例えば、L(s)式のsに1/2を代入すると、前回示した次式が出る。

$$
\begin{aligned}
L(1/2) =& 0!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^0)\cdot\zeta(1/2)/((0!)^2\cdot 2^0) + 2!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^1)\cdot\zeta(3/2)/((1!)^2\cdot 2^3) \\
&+ 4!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^2)\cdot\zeta(5/2)/((2!)^2\cdot 2^6) + 6!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^3)\cdot\zeta(7/2)/((3!)^2\cdot 2^9) \\
&+ 8!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^4)\cdot\zeta(9/2)/((4!)^2\cdot 2^{12}) + 10!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^5)\cdot\zeta(11/2)/((5!)^2\cdot 2^{15}) \\
&+ \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$\zeta(s)$式[2]の s に 1/2 を代入すると、次が出る。これも前回示したものである。

$$
\begin{aligned}
\zeta(1/2)=(\sqrt{2}/(1-\sqrt{2}))\{&0!\cdot L(1/2)/((0!)^2\cdot 2^0)-2!\cdot L(3/2)/((1!)^2\cdot 2^2)\\
&+4!\cdot L(5/2)/((2!)^2\cdot 2^4)-6!\cdot L(7/2)/((3!)^2\cdot 2^6)\\
&+8!\cdot L(9/2)/((4!)^2\cdot 2^8)-10!\cdot L(11/2)/((5!)^2\cdot 2^{10})\\
&+\cdots\cdots\}
\end{aligned}
$$

ただし、公式ではいくつか注意が必要である。話が単純ではない。

$\zeta(s)$式[2]は、s＝2 では成り立たないが、s＝1/2, s＝0, s＝−1, s＝−2, s＝−1/2, s＝−3/2 などでは成立する。

一方、$\zeta(s)$式[1]は、s＝2 や s＝3 では成り立つのに、s＝0, s＝−1, s＝−2 などでは不成立である（$\zeta(1)$が出るため）。

一方、L(s)式は、かなりの s で成り立つ。上記の s＝1/2 でも成り立つし、s＝3/2, s＝5/2 や, また s＝1, s＝2, s＝3, s＝4 や、s＝0, s＝−1 , s＝−2, s＝−3 でも成り立つ。s＝1 の場合、$(1-1/2^0)\zeta(1)$は log2 で置き換える。テイラーシステムの一般式を s＝1 で使う場合は、常にそのようにする（旧来の母関数の場合も同様）。s＝1, s＝3 は、$L(1)=\pi/4$、$L(3)=\pi^3/32$ だが、一般式からは$\zeta(s)$無限和で出る。まだ詳細には詰められていないが、そのようになっている。

なお、ガンマ関数$\Gamma(s)$は、s が半整数のとき、次のようになる。

$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

$\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2$

一般に、次のようになる。(m＝1, 2, 3, ・・)

$\Gamma(m+1/2)=(1\times3\times5\cdots\times(2m-1))\sqrt{\pi}/2^m$

$\Gamma(-m+1/2)=(-1)^m 2^m\sqrt{\pi}/(1\times3\times5\cdots\times(2m-1))$

また$\Gamma(s)$の倍積公式 $2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s)$から、

$\Gamma(s+1)/\Gamma(s)=s$

$\Gamma(s+2)/\Gamma(s)=s(s+1)$

$\Gamma(s+3)/\Gamma(s)=s(s+1)(s+2)$

$\Gamma(s+4)/\Gamma(s)=s(s+1)(s+2)(s+3)$

・・

がいえる。

公式の中の$\Gamma(s+n)/\Gamma(s)$は、上記のもので置き換えると分かりやすい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、メモやつぶやきを述べておく。

＝＝＝

●ζ(s)式[2]は、s が 1 より大きいと不成立である。しかし、s=-3/2 を代入してζ(-3/2)を出して、関数等式という反転公式を用いると、ζ(5/2)が出るのである！　反転さえさせれば、s が 1 より大きい場合も出せる。なんともふしぎである。

そのような迂回路をとれば、ζ(s)式[2]は全部の s で成立しているといえそうである。

●話は変わって、前回も紹介した高瀬正仁先生の数学史が面白く、ずっと読んでいる。

http://reuler.blog108.fc2.com/blog-date-200706.html

こんなすごいサイトがあったのだ。

「リーマンを語る(271)」、「ガウスの数学日記(113)」は大部であったが、全部目を通した。
ページ一番下の“ホーム”の右の矢印を繰っていくと、前のページに進んでいける（時間的にさかのぼる）。

１８世紀や１９世紀の数学者の日記や手紙を中心に紹介され、創造過程もつぶさに述べられていて、非常に興味深い。数学を創る過程が手に取るようにわかる。ガウスやルジャンドルやアーベルなどの複雑な人間関係もよくわかる。

そしてガウスの凄さには舌を巻く。ガウスの前にあっては、どんな数学者もかなわない。昨日読んだ「ガウスの数学日記(113)」で高瀬氏がつぶやいた次の言葉は、とくに印象に残った。

http://reuler.blog108.fc2.com/blog-category-3.html

（ガウス 119）ガウスの数論の回想(1)

「・・・・

このような神秘感はオイラーの数論には感じられず、この一点においてオイラーとガウスは明確に隔たっています。ガウスは数論の領域での思索の対象を自分で発見したのですが、オイラーの場合にはフェルマという先行者がいて、オイラーはフェルマの言葉の数々に証明を与えようとする試みを通じて数論に分け入ったのでした。証明できるものは証明し、証明できなかったものはラグランジュに受け継がれました。フェルマの枠を越えて独創の域に達した数論的思索も現れましたが、足取りは非常に堅実で、ガウスのようにあるやなきやの幻影をどこまでも追い求めるという様子は見られません。ガウスから受ける強い印象は「詩の心」ですが、オイラーの歩みには「サイエンス（科学)」が感じられます。」

＝＝＝

2021.6.20　杉岡幹生