＜ L(1/2)，ζ(1/2)の導出　新型母関数でのテイラーシステム　その２＞

前回、新型母関数を使って得られたL(2)、ζ(3)や「L(2)、ζ(2)の同時２分割」を示した。今回、L(1/2)、ζ(1/2)が導出できたので、それを示したい。

それを示す前に訂正がある。前回、「新型母関数では有理数係数の式しか出ない」と述べたが、正確には誤りであり、それが言えるのは整数nでのζ(n)、L(n)やその分身だけであると分かった。例えば、半整数のL(1/2)などは係数に$\sqrt{2}$などの無理数が出る。ただし新型母関数を使った結果では、どのような場合でも旧来の母関数ではよく出ていたπは出ないと考えられる。
以上、訂正とさせていただきたい。

整数点での値に限れば、ゼータ値が[有理数係数ゼータの無限和]となるだけでも、面白いことに変わりはない。

それでは、得られたL(1/2)、ζ(1/2)を示す。以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
L(1/2)=\;&0!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^0)\cdot\zeta(1/2)/((0!)^2\cdot 2^0)+2!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^1)\cdot\zeta(3/2)/((1!)^2\cdot 2^3)\\
&+4!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^2)\cdot\zeta(5/2)/((2!)^2\cdot 2^6)+6!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^3)\cdot\zeta(7/2)/((3!)^2\cdot 2^9)\\
&+8!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^4)\cdot\zeta(9/2)/((4!)^2\cdot 2^{12})+10!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^5)\cdot\zeta(11/2)/((5!)^2\cdot 2^{15})\\
&+\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(1/2)=(\sqrt{2}/(1-\sqrt{2}))\{&0!\cdot L(1/2)/((0!)^2\cdot 2^0)-2!\cdot L(3/2)/((1!)^2\cdot 2^2)\\
&+4!\cdot L(5/2)/((2!)^2\cdot 2^4)-6!\cdot L(7/2)/((3!)^2\cdot 2^6)\\
&+8!\cdot L(9/2)/((4!)^2\cdot 2^8)-10!\cdot L(11/2)/((5!)^2\cdot 2^{10})\\
&+\cdots\cdots\}
\end{aligned}
$$

L(1/2)の導出方法のみ記す。ζ(1/2)も同じ母関数を使ってf(1)とx=1/2周りテイラー展開でやればできるので読者のほうで挑戦されたし。

[L(1/2)導出方法]

$f(x)=1/x^{1/2}-1/(x+1)^{1/2}+1/(x+2)^{1/2}-1/(x+3)^{1/2}+1/(x+4)^{1/2}-\cdots$　　------①
という母関数を考える。

①でxに1/2を代入すると、次となる。

$f(1/2)=1/(1/2)^{1/2}-1/(3/2)^{1/2}+1/(5/2)^{1/2}-1/(7/2)^{1/2}+\cdots=\sqrt{2}\cdot L(1/2)$　　--------②

①をx=1の周りでテイラー展開した結果のxに1/2を代入すると、計算により次となる。

$f(1/2)=(1-\sqrt{2})\cdot\zeta(1/2)\quad+(1/2)\cdot(1-1/\sqrt{2})\cdot\zeta(3/2)/(1!\,2^1)$
$\quad+((1\cdot3)/2^2)\cdot(1-1/(2\sqrt{2}))\cdot\zeta(5/2)/(2!\,2^2)\quad+((1\cdot3\cdot5)/2^3)\cdot(1-1/(2^2\sqrt{2}))\cdot\zeta(7/2)/(3!\,2^3)$
$\quad+\quad\cdots\cdots\quad$ --------③

②と③は等しいので、②＝③として形を整えると、次のようにL(1/2)が得られる。

$L(1/2)=0!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^0)\cdot\zeta(1/2)/((0!)^2\cdot2^0)\ +2!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^1)\cdot\zeta(3/2)/((1!)^2\cdot2^3)$
$\quad+4!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^2)\cdot\zeta(5/2)/((2!)^2\cdot2^6)\ +6!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^3)\cdot\zeta(7/2)/((3!)^2\cdot2^9)$
$\quad+8!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^4)\cdot\zeta(9/2)/((4!)^2\cdot2^{12})\ +10!\cdot(1/\sqrt{2}-1/2^5)\cdot\zeta(11/2)/((5!)^2\cdot2^{15})$
$\quad+\quad\cdots\cdots$

（導出終わり）
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにしてL(1/2)、ζ(1/2)が得られた。

両式を眺めるだけで、L(1/2)の方がζ(1/2)より収束が速いことがわかるであろう。

なお、それぞれの実際の値は以下となる。
ζ(1/2)は math world に出ている。L(1/2)は出ていないので１５年前に私が１億項まで計算して出した値である。
ζ(1/2)＝-1.46035450880・・
https://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html

L(1/2)＝0.66769145
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page129.htm

L(1/2)は現実世界で収束する値である。ζ(1/2)は現実世界で収束しない。複素関数論の解析接続で意味づけされる値である。

ともにExcel VBAで数値計算を行って正しいことを確認した。
L(1/2)は収束が速いので確認は容易であった。１５年前に算出したζ(0.5)～ζ(19.5)を利用。２０項目まで確認した（それで十分）。

ζ(1/2)は収束が遅いのでプログラムを工夫しなければならなかったが、正しいことを確認した。L(0.5)～L(33.5)の値を利用、それ以上のL(半整数)は１として2400項まで計算。それ以上はオーバーフロー。ζ(1/2)＝-1.46035450880・・　に収束していく。交代級数なので収束は分かりやすい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●まだ出せる段階ではないが、新型母関数でのＬ(s)とξ(s)の一般のｓに対する公式も見出した。
Ｌ(s)は一つ、ξ(s)は二タイプのものを導いた。
上記のξ(1/2)はその二タイプのうちの一つの公式（ノートに“ξ(s)公式[2]”と記した）に対し、s＝1/2 とすれば出るものである。しかしその公式はふしぎなことに s＝2 では収束しないものになっている。
ξ(s)公式[1]の方は、多くのｓで大丈夫そうである。

●１５年前にテイラーシステムで（旧来の母関数で）一番最初に出したのがξ(1/2)であった。それと今回のものを比べてみても面白いかもしれない。http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page117.htm

●話は変わるが、数学史家の高瀬正仁氏のサイトが面白く、よく眺めている。
http://reuler.blog108.fc2.com/blog-date-200706.html

多くのページでたくさんの事柄がつづられている。１７世紀～１９世紀の世界にタイムスリップしたかのような印象があり、数学者の日記や手紙のやりとりが記されていてきわめて面白い。
実際の数学の創造は、教科書の記述とはまるでちがって進んでいたことがわかる。面白すぎる。
http://reuler.blog108.fc2.com/blog-category-11-14.html

上記は、今日、印象に残った一ページ（下から上へと読んでいく）。通説とは異なる異論、あまりにも重大な事柄が指摘されている。ガウス、アーベル、ガロア、ヤコビ、ルジャンドル、そしてフーリエ、ディリクレその他の複雑な関係が述べられている。

５次方程式に解の公式がないと最初に認識し著作で証明なしで明言したのはガウスであり（上記とは別のページで）、アーベルはガウスの示唆を受けているはず。ガロア理論も、ガウスの円周等分方程式の理論から由来するもののようである。

ページの一番下の“ホーム“の所で、ページを繰っていく構成になっている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.6.6　杉岡幹生