＜ フルヴィッツのゼータ関数ζ(s, a)の値を導出＞

今回は、フルヴィッツのゼータ関数ζ(s, a)の値を出したので報告したい。

フルヴィッツ・ゼータζ(s, a)とは、次のものである。形はリーマン・ゼータζ(s)と似ており、兄弟のような感じのものである。a＝1 のとき、ζ(s)に一致する。

$$\zeta(s, a) = 1/a^s + 1/(1+a)^s + 1/(2+a)^s + 1/(3+a)^s + \cdots$$

ここで、a は正の実数、s は複素数。右辺の級数は Re(s)>1 で絶対収束するので、この範囲でζ(s, a)は定義される。ただし複素関数論によって、ζ(s, a)は全複素平面の有理型関数に解析接続される。

１３年前に私はフルヴィッツのゼータ関数の値をテイラーシステムで出そうとして、ζ(2, 1/2)の値だけ出すことに成功していた。⇒http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page162.htm

ただし、出せたのはζ(2, 1/2)だけであり、それ以外の値に関してはよくわからなかった。上記サイトで「・・ζ(s, 1/4)もすこし調べたが、・・・私の力不足でよくわからない点が出たので、保留とし今後の課題としておいておく。」と述べている。

Ｌ(χ，ｓ)ゼータで万能の働きをしてくれたテイラーシステムが、ζ(s, a)でなぜうまく働かないのか？その理由がつかめずにいた。何度トライしてもうまくいかなかったのだが、ひょんなことから導出に成功したので、いくつかの具体例をあげて結果を示したい。

その前にまず、テイラーシステムのことについて少し述べる。これはζ(s)やＬ(s)を含むＬ(χ，ｓ)ゼータの特殊値を簡単に求める方法で、１５年前に開発したものである。
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page117.htm

テイラーシステムを使うと、Ｌ(χ，ｓ)ゼータの任意の実数点（s＝実数）での値が求められる。また、なぜζ(2)、ζ(4)やＬ(1)、Ｌ(3)が明示的に求まり、それ以外は級数のような非明示的な値になるのかの理由も明確に分かる。これらが大きな特長である。

その手順は、次となる。

① 求めたいゼータに対応する母関数を設定する。
② その母関数に、ある値を代入する（Ａ式が得られる)。
③ 母関数をテイラー展開して得られた式に、②と同じ“ある値”を代入する（Ｂ式が得られる)。
④ Ａ式＝Ｂ式とすると、求めるゼータ値が得られる。

以上。

これまでフルヴィッツ・ゼータ$\zeta(a, s)$でうまくいかなかったのは、母関数の設定を間違っていたから！と気づいた。

Ｌ（χ，ｓ）では三角関数のフーリエ級数のようなものを母関数とするが、フルヴィッツ・ゼータではそれではうまくいなかい。$\zeta(s, a)$の定義式そのもののような母関数を使う必要がある。

さて、次の$\zeta(2, 1/4)$をテイラーシステムを使って求めたので、その導出過程を示す。

$$\zeta(2, 1/4) = 1/(1/4)^2 + 1/(1+1/4)^2 + 1/(2+1/4)^2 + 1/(3+1/4)^2 + \cdots$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[$\zeta(2, 1/4)$の導出]

$$f(x) = 1/x^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(2+x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(4+x)^2 + \cdots \quad \text{------①}$$

という母関数を考える。

①で x に 1/4 を代入すると、次となる。

$$f(1/4) = 1/(1/4)^2 + 1/(1+1/4)^2 + 1/(2+1/4)^2 + 1/(3+1/4)^2 + 1/(4+1/4)^2 + \cdots$$
$$= \zeta(2, 1/4) \quad \text{------------②}$$

次に、①の右辺を x＝1 の周りでテイラー展開すると、簡単な計算により次となる。

$$f(x) = \zeta(2) - 2!\cdot\zeta(3)\cdot(x-1)^1/1! + 3!\cdot\zeta(4)\cdot(x-1)^2/2!$$
$$- 4!\cdot\zeta(5)\cdot(x-1)^3/3! + 5!\cdot\zeta(6)\cdot(x-1)^4/4!$$
$$- 6!\cdot\zeta(7)\cdot(x-1)^5/5! + 7!\cdot\zeta(8)\cdot(x-1)^6/6!$$
$$\cdots\cdots \quad \text{--------③}$$

上式の x に 1/4 を代入して、次を得る。

$$f(1/4) = \zeta(2) + 2\cdot\zeta(3)\cdot(3/4)^1 + 3\cdot\zeta(4)\cdot(3/4)^2$$
$$+ 4\cdot\zeta(5)\cdot(3/4)^3 + 5\cdot\zeta(6)\cdot(3/4)^4$$
$$+ 6\cdot\zeta(7)\cdot(3/4)^5 + 7\cdot\zeta(8)\cdot(3/4)^6$$
$$\cdots\cdots \quad \text{-------④}$$

②と④から、次となる。

$$\zeta(2, 1/4) = \zeta(2) + 2\cdot\zeta(3)\cdot(3/4)^1 + 3\cdot\zeta(4)\cdot(3/4)^2$$
$$+ 4\cdot\zeta(5)\cdot(3/4)^3 + 5\cdot\zeta(6)\cdot(3/4)^4$$
$$+ 6\cdot\zeta(7)\cdot(3/4)^5 + 7\cdot\zeta(8)\cdot(3/4)^6$$
$$\cdots\cdots$$

$\zeta(2, 1/4)$が求まった。

（導出終わり）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにしてζ(2, 1/4)が得られた。まったく簡単である。

右辺にζ(s)の全ての(正の)偶数ゼータ値と奇数ゼータ値が出ているのが、面白い。

ζ(2, 1/4)とともに、ζ(2, 9/10)、ζ(3, 9/10)も出したので、一緒にまとめておく。

$$\zeta(2,1/4)=\zeta(2)+2\cdot\zeta(3)\cdot(3/4)^1+3\cdot\zeta(4)\cdot(3/4)^2+4\cdot\zeta(5)\cdot(3/4)^3+5\cdot\zeta(6)\cdot(3/4)^4+6\cdot\zeta(7)\cdot(3/4)^5+7\cdot\zeta(8)\cdot(3/4)^6\cdots\cdots$$

$$\zeta(2,9/10)=\zeta(2)+2\cdot\zeta(3)/10^1+3\cdot\zeta(4)/10^2+4\cdot\zeta(5)/10^3+5\cdot\zeta(6)/10^4+6\cdot\zeta(7)/10^5+7\cdot\zeta(8)/10^6\cdots\cdots$$

$$\zeta(3,9/10)=\zeta(3)+(1/2)\{(3!/1!)\zeta(4)/10^1+(4!/2!)\zeta(5)/10^2+(5!/3!)\zeta(6)/10^3+(6!/4!)\zeta(7)/10^4+(7!/5!)\zeta(8)/10^5+(8!/6!)\zeta(9)/10^6+\cdots\cdots\}$$

Excel を使っての数値検証はζ(2, 9/10)のみ行ったが、正しいものであった。右辺の級数が数値検証しにくい形なので他は行っていないが、正しいはずである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●ζ(s)とL(s)に対するテイラーシステムで導出した一般公式は、以下の通りである。本シリーズのどこかで紹介したと思う。

ζ(s)式： Cos[s＝s, π/2 代入, πテイラー]

$$\begin{aligned}(1-1/2^s)(1-1/2^{s-1})\zeta(s)\\ &=(1-1/2^{s-3})\zeta(s-2)\,\pi^2/(2!\cdot2^2)\\ &\quad-(1-1/2^{s-5})\zeta(s-4)\,\pi^4/(4!\cdot2^4)\\ &\quad+(1-1/2^{s-7})\zeta(s-6)\,\pi^6/(6!\cdot2^6)\\ &\quad-(1-1/2^{s-9})\zeta(s-8)\,\pi^8/(8!\cdot2^8)\\ &\quad+(1-1/2^{s-11})\zeta(s-10)\,\pi^{10}/(10!\cdot2^{10})\\ &\quad-(1-1/2^{s-13})\zeta(s-12)\,\pi^{12}/(12!\cdot2^{12})\end{aligned}$$

・・・・・・・・・・・・・

L(s)式：　Sin[s＝s, π/2 代入, πテイラー]

$$L(s) = (1 - 1/2^{s-2})\zeta(s-1)\,\pi^1/(1!\cdot 2^1) - (1 - 1/2^{s-4})\zeta(s-3)\,\pi^3/(3!\cdot 2^3) + (1 - 1/2^{s-6})\zeta(s-5)\,\pi^5/(5!\cdot 2^5) - (1 - 1/2^{s-8})\zeta(s-7)\,\pi^7/(7!\cdot 2^7) + (1 - 1/2^{s-10})\zeta(s-9)\,\pi^9/(9!\cdot 2^9) - (1 - 1/2^{s-12})\zeta(s-11)\,\pi^{11}/(11!\cdot 2^{11})$$

・・・・・・・・・・・・・

　これは、ある条件で出した公式だが、導出条件（〇代入、〇テイラーなど）を変えればまた別の公式が得られる。テイラーシステムでは多様な公式が出せる。

　上記と類似の公式が、フルヴィッツ・ゼータξ(a, s)でも得られるはずである。

●Wikipedia でのフルヴィッツ・ゼータの解説を見ると、そのゼロ点に関しては、まだ不明な点もあるようである。
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%83%AB%E3%83%B4%E3%82%A3%E3%83%83%E3%83%84%E3%81%AE%E3%82%BC%E3%83%BC%E3%82%BF%E5%87%BD%E6%95%B0

●ξ(s)の一般化がフルヴィッツのゼータ関数ξ(s, a)であるならば、L(s)の一般化のL(s, a)もできるに違いない。そして今回示した方法で、その値も得られるはずである。

●フルヴィッツ(Adolf Hurwitz, 1859-1919, ドイツ)は、「円の数学」（小林昭七著、裳華房）にもその小伝が記されていて、昔からちょっと気になっていた人である。よく名前を聞く数学者だが、どんな人なのか。その小伝を簡単に要約する。
****
　フルヴィッツは、非常に若くして才能を現した数学者であった。ドイツの高校（ギムナジウム）で教えていた数学者シューベルトにその才能を見出された。シューベルトは、フルヴィッツが数学者になるための準備など様々な支援を行った。シューベルトの勧めもあって、1877 年にミュンヘンのクライン(1849-1925)のところに行った。
　ベルリンでも学び、ワイヤシュトラスやクロネッカーから学んだ後、またミュンヘンに戻った。クラインがライプヒッチに移ったとき、彼についていき、22 歳で楕円モジュラ関数の仕事で博士号をとった。1883 年に、リンデマンに招かれてケーニヒスベルク大学に助教授として移る。同大学にはヒルベルト(1862-1943)やミンコフスキー(1864-1909)らが学生としていた。1892 年にチューリッヒ工科大学の教授となった。
****

ざっとこんな感じである。フルヴィッツは、若いころから重要な仕事を生涯にわたってし続けたという感じの数学者である。環境や運にも恵まれている。ヒルベルトやミンコフスキーとは年齢的に近く、先生と学生という関係より、同世代の仲間という雰囲気で研究しあったにちがいない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.5.22　杉岡幹生

（参考文献）

・「ベルヌーイ数とゼータ関数」（荒川恒男・伊吹山知義・金子昌信著、牧野書店）

・「初等数学によるゼータ関数の探求」（杉岡幹生、武捨貴昭著、パブフル）

・「円の数学」（小林昭七著、裳華房）