＜Q(√‾-m)と Q(√‾m)のゼータを同時に作る分割が存在する(予想)、Q(√‾-11)と Q(√‾11)＞

予想の確認の続きである。今回は m＝11 の虚２次体 Q(√‾-11)と実２次体 Q(√‾11)で確認する。すなわち、その両２次体それぞれのゼータを同時に作ることができる分割が存在することを確認しよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜予想(改良版)＞

部分分数展開式①と、それを１回微分した式②の x に、複数の k を用いて k/(2m)を代入することで、虚２次体 Q(√‾-m)、実２次体 Q(√‾m)のそれぞれのゼータを同時に構成する分割を得ることができる。
ここで、m は平方因子を含まない自然数、k は 1≦k<2m を満たす自然数である。

$1/(1^2-x^2)\ +1/(3^2-x^2)\ +1/(5^2-x^2)\ +\cdots\ =(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$ ----①

$1/(1^2-x^2)^2\ +1/(3^2-x^2)^2\ +1/(5^2-x^2)^2\ +\cdots=(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2)\ -\{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2)$ ---②

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

m＝11 の場合を具体的に述べると、次のようになる。

①と②の x に 21/22, 19/22, 17/22, 15/22, 13/22, 9/22, 7/22, 5/22, 3/22, 1/22 を代入することで、虚2次体 Q(√‾-11)ゼータ LQ(1)の１０分割ができ、同時に実 2 次体 Q(√‾11)ゼータ LM2(2)の１０分割ができる。

LQ(s)は(その188)や(その190)で考察したものだが、次のようなゼータである。

LQ(s)は、ディリクレのL関数 L(χ,s)

$L(\chi,s)=\chi(1)/1^s+\chi(2)/2^s+\chi(3)/3^s+\chi(4)/4^s+\chi(5)/5^s+\chi(6)/6^s+\chi(7)/7^s+\cdots$

の一種で、次のものである。

$LQ(s)=1-1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s-1/6^s-1/7^s-1/8^s+1/9^s-1/10^s+1/12^s-1/13^s+1/14^s+1/15^s+1/16^s-1/17^s-1/18^s-1/19^s+1/20^s-1/21^s+\cdots$

LQ(s)は虚２次体 Q(√‾-11)のゼータ関数で、導手 N＝11 を持つ。ディリクレ指標χ(n)は次の通り。

n≡1 or 3 or 4 or 5 or 9 mod 11 のときχ(n)＝1,
n≡2 or 6 or 7 or 8 or 10 mod 11 のときχ(n)＝-1,
その他のときχ(n)＝0 となる。

よって、s＝1 の LQ(1)は次となる。

$LQ(s)=1-1/2+1/3+1/4+1/5-1/6-1/7-1/8+1/9-1/10+1/12-1/13+1/14+1/15+1/16-1/17-1/18-1/19+1/20-1/21+\cdots$

さらに、LQ(1)は以下のように変形できる。 変形の詳細は(その190)を参照いただきたい。

$(3/2)LQ(1)=Lq(1)$ ---------(A)

ここで、Lq(1)は次のものである。

$Lq(1) = 1 + 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/13 + 1/15 - 1/17 - 1/19 - 1/21$
$+ 1/23 + 1/25 + 1/27 - 1/29 + 1/31 - 1/35 + 1/37 - 1/39 - 1/41 - 1/43$
$+ \cdots\cdots$

つまり、Lq(1)は、LQ(1)と本質的に同じものである。(Lp(s)は LQ(s)と同じと言ってもよい)
虚2次体の類数公式より $LQ(1) = \pi/\sqrt{11}$ であるので、上記の(A)より、 $Lq(1) = (3/2)LQ(1) = 3\pi/(2\sqrt{11})$ ---(B)

以下では、この Lq(1)を見ることになる。

次に、LM2(s)も $L(\chi,s)$の一種で、次の形をしたものである。
$LM2(s) = 1 - 1/3^s + 1/5^s + 1/7^s + 1/9^s - 1/13^s - 1/15^s - 1/17^s + 1/19^s - 1/21^s - 1/23^s + 1/25^s - 1/27^s - 1/29^s$
$- 1/31^s + 1/35^s + 1/37^s + 1/39^s - 1/41^s + 1/43^s + \cdots$

LM2(s)は実2次体 $Q(\sqrt{11})$のゼータ関数で、導手 N=44 を持つ。ディリクレ指標$\chi(n)$は次の通り。
$n \equiv 1$ or 5 or 7 or 9 or 19 or 25 or 35 or 37 or 39 or 43 mod 44 のとき$\chi(n)=1$,
$n \equiv 3$ or 13 or 15 or 17 or 21 or 23 or 27 or 29 or 31 or 41 mod 44 のとき$\chi(n)=-1$,
その他のとき$\chi(n)=0$ となる。

よって、s=2 の LM2(2)は次となる。
$LM2(2) = 1 - 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 - 1/13^2 - 1/15^2 - 1/17^2 + 1/19^2 - 1/21^2 - 1/23^2 + 1/25^2 - 1/27^2 - 1/29^2 - 1/31^2$
$+ 1/35^2 + 1/37^2 + 1/39^2 - 1/41^2 + 1/43^2 + 1/45^2 - 1/47^2 + 1/49^2 + 1/51^2 + 1/53^2 - 1/57^2 - 1/59^2 - 1/61^2 + 1/63^2 - 1/65^2$
$- 1/67^2 + 1/69^2 - 1/71^2 - 1/73^2 - 1/75^2 + 1/79^2 + 1/81^2 + 1/83^2 - 1/85^2 + 1/87^2 + \cdots$

この LM2(s)は16年前に考察したものでもある。⇒自身のサイト(重回積分 $\pi/22$ 代入)
念のため、合同方程式と平方剰余の相互法則から上記の級数の形が正しいことを今回再度確認した。OK。

なお、“LQ()”や“Lq( )”やまた”LM2()”という記法は、私が独自に以前から用いているものであり、一般的なものでないので注意いただきたい。

今回も過去の結果を一部利用する。Lq(1)10分割は(その107)で得た L(1)11分割の結果を流用する。LM2(2)10分割は、(そ108)での$\zeta(2)$11分割で実質的には出しているが、予想を厳密に調べるため、今回計算した。

では、m=11 の場合を検証しよう。

<m=11 の場合の予想の検証>

予想の中の②の x に 21/22 を代入して、次を得る。
$(22^4/42^2)(A - a/21) = (\pi^2 \cdot 22^2/(4^2 \cdot 21^2))/\cos^2(21\pi/44) - (\pi \cdot 22^3/(8 \cdot 21^3))\tan(21\pi/44)$ ------③
ここで、左辺の A, a は次のものである。
$A = 1 + 1/43^2 + 1/45^2 + 1/87^2 + 1/89^2 + 1/131^2 + \cdots$
$a = 1 - 1/43 + 1/45 - 1/87 + 1/89 - 1/131 + \cdots$

②の x に 19/22 を代入して、次を得る。

$(22^4/38^2)(B-b/19)=(\pi^2\cdot 22^2/(4^2\cdot 19^2))/\cos^2(19\pi/44)-(\pi\cdot 22^3/(8\cdot 19^3))\tan(19\pi/44)$ ------④

ここで、左辺の B, b は次のものである。

$B=1/3^2+1/41^2+1/47^2+1/85^2+1/91^2+1/129^2+\cdots$

$b=1/3-1/41+1/47-1/85+1/91-1/129+\cdots$

②の x に 17/22 を代入して、次を得る。

$(22^4/34^2)(C-c/17)=(\pi^2\cdot 22^2/(4^2\cdot 17^2))/\cos^2(17\pi/44)-(\pi\cdot 22^3/(8\cdot 17^3))\tan(17\pi/44)$ ------⑤

ここで、左辺の C, c は次のものである。

$C=1/5^2+1/39^2+1/49^2+1/83^2+1/93^2+1/127^2+\cdots$

$c=1/5-1/39+1/49-1/83+1/93-1/127+\cdots$

②の x に 15/22 を代入して、次を得る。

$(22^4/30^2)(D-d/15)=(\pi^2\cdot 22^2/(4^2\cdot 15^2))/\cos^2(15\pi/44)-(\pi\cdot 22^3/(8\cdot 15^3))\tan(15\pi/44)$ ------⑥

ここで、左辺の D, d は次のものである。

$D=1/7^2+1/37^2+1/51^2+1/81^2+1/95^2+1/125^2+\cdots$

$d=1/7-1/37+1/51-1/81+1/95-1/125+\cdots$

②の x に 13/22 を代入して、次を得る。

$(22^4/26^2)(E-e/13)=(\pi^2\cdot 22^2/(4^2\cdot 13^2))/\cos^2(13\pi/44)-(\pi\cdot 22^3/(8\cdot 13^3))\tan(13\pi/44)$ ------⑦

ここで、左辺の E, e は次のものである。

$E=1/9^2+1/35^2+1/53^2+1/79^2+1/97^2+1/123^2+\cdots$

$e=1/9-1/35+1/53-1/79+1/97-1/123+\cdots$

②の x に 9/22 を代入して、次を得る。

$(22^4/18^2)(F-f/9)=(\pi^2\cdot 22^2/(4^2\cdot 9^2))/\cos^2(9\pi/44)-(\pi\cdot 22^3/(8\cdot 9^3))\tan(9\pi/44)$ ------⑧

ここで、左辺の F, f は次のものである。

$F=1/13^2+1/31^2+1/57^2+1/75^2+1/101^2+1/119^2+\cdots$

$f=1/13-1/31+1/57-1/75+1/101-1/119+\cdots$

②の x に 7/22 を代入して、次を得る。

$(22^4/14^2)(G-g/7)=(\pi^2\cdot 22^2/(4^2\cdot 7^2))/\cos^2(7\pi/44)-(\pi\cdot 22^3/(8\cdot 7^3))\tan(7\pi/44)$ ------⑨

ここで、左辺の G, g は次のものである。

$G=1/15^2+1/29^2+1/59^2+1/73^2+1/103^2+1/117^2+\cdots$

$g=1/15-1/29+1/59-1/73+1/103-1/117+\cdots$

②の x に 5/22 を代入して、次を得る。

$(22^4/10^2)(H-h/5)=(\pi^2\cdot 22^2/(4^2\cdot 5^2))/\cos^2(5\pi/44)-(\pi\cdot 22^3/(8\cdot 5^3))\tan(5\pi/44)$ ------⑩

ここで、左辺の H, h は次のものである。

$H=1/17^2+1/27^2+1/61^2+1/71^2+1/105^2+1/115^2+\cdots$

$h=1/17-1/27+1/61-1/71+1/105-1/115+\cdots$

②の x に 3/22 を代入して、次を得る。

$(22^4/6^2)(I-i/3)=(\pi^2\cdot22^2/(4^2\cdot3^2))/\cos^2(3\pi/44)-(\pi\cdot22^3/(8\cdot3^3))\tan(3\pi/44)$ ------⑪

ここで、左辺の I, i は次のものである。

$I=1/19^2+1/25^2+1/63^2+1/69^2+1/107^2+1/113^2+\cdots$

$i=1/19-1/25+1/63-1/69+1/107-1/113+\cdots$

②の x に 1/22 を代入して、次を得る。

$(22^4/2^2)(J-j)=(\pi^2\cdot22^2/(4^2\cdot1^2))/\cos^2(\pi/44)-(\pi\cdot22^3/(8\cdot1^3))\tan(\pi/44)$ ------⑫

ここで、左辺の J, j は次のものである。

$J=1/21^2+1/23^2+1/65^2+1/67^2+1/109^2+1/111^2+\cdots$

$j=1/21-1/23+1/65-1/67+1/109-1/111+\cdots$

さて、③～⑫左辺の a～j の値は、予想の①の x に 21/22, 19/22, 17/22, 15/22, 13/22, 9/22, 7/22, 5/22, 3/22, 1/22 を代入した結果として既に(その107)の L(1) １１分割で得ている(１１分身のうちの１０分身が対応)。その結果を流用すると、a～j の値は次となる(右辺)。

$a=1-1/43+1/45-1/87+1/89-1/131+\cdots=(\pi/44)\tan(21\pi/44)$

$b=1/3-1/41+1/47-1/85+1/91-1/129+\cdots=(\pi/44)\tan(19\pi/44)$

$c=1/5-1/39+1/49-1/83+1/93-1/127+\cdots=(\pi/44)\tan(17\pi/44)$

$d=1/7-1/37+1/51-1/81+1/95-1/125+\cdots=(\pi/44)\tan(15\pi/44)$

$e=1/9-1/35+1/53-1/79+1/97-1/123+\cdots=(\pi/44)\tan(13\pi/44)$

$f=1/13-1/31+1/57-1/75+1/101-1/119+\cdots=(\pi/44)\tan(9\pi/44)$

$g=1/15-1/29+1/59-1/73+1/103-1/117+\cdots=(\pi/44)\tan(7\pi/44)$

$h=1/17-1/27+1/61-1/71+1/105-1/115+\cdots=(\pi/44)\tan(5\pi/44)$

$i=1/19-1/25+1/63-1/69+1/107-1/113+\cdots=(\pi/44)\tan(3\pi/44)$

$j=1/21-1/23+1/65-1/67+1/109-1/111+\cdots=(\pi/44)\tan(\pi/44)$

これら a～j の値(右辺値)を③～⑫に代入すると、A～J の値として次を得る(右辺)。

$A=1+1/43^2+1/45^2+1/87^2+1/89^2+1/131^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(21\pi/44)$

$B=1/3^2+1/41^2+1/47^2+1/85^2+1/91^2+1/129^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(19\pi/44)$

$C=1/5^2+1/39^2+1/49^2+1/83^2+1/93^2+1/127^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(17\pi/44)$

$D=1/7^2+1/37^2+1/51^2+1/81^2+1/95^2+1/125^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(15\pi/44)$

$E=1/9^2+1/35^2+1/53^2+1/79^2+1/97^2+1/123^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(13\pi/44)$

$F=1/13^2+1/31^2+1/57^2+1/75^2+1/101^2+1/119^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(9\pi/44)$

$G=1/15^2+1/29^2+1/59^2+1/73^2+1/103^2+1/117^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(7\pi/44)$

$H=1/17^2+1/27^2+1/61^2+1/71^2+1/105^2+1/115^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(5\pi/44)$

$I=1/19^2+1/25^2+1/63^2+1/69^2+1/107^2+1/113^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(3\pi/44)$

$J=1/21^2+1/23^2+1/65^2+1/67^2+1/109^2+1/111^2+\cdots=(\pi/44)^2/\cos^2(\pi/44)$

これで準備は整った。

” a +b +c −d +e −f +g −h −i −j”と“A −B +C +D +E −F −G −H + I −J“を計算すると、次のようにLQ(1)とLM2(2)が得られる！（そして、その値も得られる！）

なお、Lq(1)＝$3\pi/(2\sqrt{11})$は、上方で先に得ていた(B)の結果を使った。

$a+b+c-d+e-f+g-h-i-j$

$=1+1/3+1/5-1/7+1/9-1/13+1/15-1/17-1/19-1/21$
$\quad +1/23+1/25+1/27-1/29+1/31-1/35+1/37-1/39-1/41-1/43$
$\quad + \cdots\cdots$

＝Lq(1)

$=(\pi/44)\{\tan(21\pi/44)+\tan(19\pi/44)+\tan(17\pi/44)-\tan(15\pi/44)+\tan(13\pi/44)-\tan(9\pi/44)$
$\quad +\tan(7\pi/44)-\tan(5\pi/44)-\tan(3\pi/44)-\tan(\pi/44)\}$

$\mathbf{=3\pi/(2\sqrt{11})}$

$A-B+C+D+E-F-G-H+I-J$

$=1-1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2-1/13^2-1/15^2-1/17^2+1/19^2-1/21^2-1/23^2+1/25^2-1/27^2-1/29^2-1/31^2+1/35^2$
$+1/37^2+1/39^2-1/41^2+1/43^2+1/45^2-1/47^2+1/49^2+1/51^2+1/53^2-1/57^2-1/59^2-1/61^2+1/63^2-1/65^2-1/67^2$
$+1/69^2-1/71^2-1/73^2-1/75^2+1/79^2+1/81^2+1/83^2-1/85^2+1/87^2+\cdots$

＝LM2(2)

$=(\pi/44)^2\{1/\cos^2(21\pi/44)-1/\cos^2(19\pi/44)+1/\cos^2(17\pi/44)+1/\cos^2(15\pi/44)+1/\cos^2(13\pi/44)$
$\quad -1/\cos^2(9\pi/44)-1/\cos^2(7\pi/44)-1/\cos^2(5\pi/44)+1/\cos^2(3\pi/44)-1/\cos^2(\pi/44)\}$

$\mathbf{=7\pi^2/(22\sqrt{11})}$

結局、a, b, c, −d, e, −f, g, −h, −i, −j が LQ(1)の１０分身であり、A, −B, C, D, E, −F, −G, −H, I, −J が LM2(2)の１０分身となっている。

上記三角関数の計算を遂行すると、Lq(1)の値が $3\pi/(2\sqrt{11})$に一致することを Excel で確認した。

LM2(2)の値 $7\pi^2/(22\sqrt{11})$を上記三角関数の計算から出すのは大変である。そこで、別ルートをとり、（有理数）× $\pi^2/\sqrt{11}$ の予想と Excel での数値計算を実行することで $7\pi^2/(22\sqrt{11})$を得た。

LQ(1)、LM2(2)の級数の値も Excel マクロで数値計算し、それぞれ $3\pi/(2\sqrt{11})$と $7\pi^2/(22\sqrt{11})$に収束することを確認した。OK。

予想での①、②の x に 21/22, 19/22, 17/22, 15/22, 13/22, 9/22, 7/22, 5/22, 3/22, 1/22 を代入することで、LQ(1) と LM2(2)の１０分割が同時に得られることが分かった。両ゼータの特殊値が求まったことにも注目したい。

よって、m＝11 での予想の正しさが確認できた。
（検証終わり）

このようにして、m＝11 での成立が確認できた。

両ゼータとその値を再掲しよう。両方の値に$\sqrt{11}$ が出ていることを改めて確認しておきたい。

Lq(1)$=1+1/3+1/5-1/7+1/9-1/13+1/15-1/17-1/19-1/21$
$\quad +1/23+1/25+1/27-1/29+1/31-1/35+1/37-1/39-1/41-1/43$

+ ・・・

$=3\pi/(2\sqrt{11})$

LM2(2)$=1-1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2-1/13^2-1/15^2-1/17^2+1/19^2-1/21^2-1/23^2+1/25^2-1/27^2-1/29^2-1/31^2$
$+1/35^2+1/37^2+1/39^2-1/41^2+1/43^2+1/45^2-1/47^2+1/49^2+1/51^2+1/53^2-1/57^2-1/59^2-1/61^2+1/63^2-1/65^2$
$-1/67^2+1/69^2-1/71^2-1/73^2-1/75^2+1/79^2+1/81^2+1/83^2-1/85^2+1/87^2+$ ・・・・・

$=7\pi^2/(22\sqrt{11})$

最後に、整理の意味から少しメモしておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●これまで見てきたように、L(χ,s)における Q(√−m)ゼータの s＝1 の値と Q(√m)ゼータの s＝2 の値には√m が出現する。これはどこまでもそうなっているのだろう。

m＝2 では、どちらのゼータ値にも√2 が出た。⇒(その191)
m＝3 では、どちらのゼータ値にも√3 が出た。⇒(その192)
m＝5 では、どちらのゼータ値にも√5 が出た。⇒(その193)
m＝6 では、どちらのゼータ値にも√6 が出た。⇒(その194)
m＝7 では、どちらのゼータ値にも√7 が出た。⇒(その195)
m＝10 では、どちらのゼータ値にも√10 が出た。⇒(その197)
m＝11 では、どちらのゼータ値にも√11 が出た。⇒今回

これは、ζ(s)を包含するゼータL(χ,s)には美しい地下構造が存在することを暗示している。

●虚2次体の類数公式は、L(χ,1)＝2πh/(w√N)である。
ここで、h は虚2次体の類数、w は虚2次体に含まれる 1 のべき根の個数。NはL(χ,s)の導手。
この公式には、導手 N の√N が含まれているので、虚2次体L(χ,s)の s＝1 のL(χ,1)には必ず√N が出る。
よって、一つ上の事実は虚2次体ゼータではそんなに不思議ではない。
しかし、実2次体L(χ,s)でのs＝2 のL(χ,2)値を与える公式があるのかどうか私は知らないので(そのようなものはあるのだろうか？)、一つ上のようなことになるのが必然なのか、現時点では私は分からない。

●本シリーズの流れを振り返り、ゼータの香りの漂う公式の高次微分の構造を考えると、両2次体に対応するL(χ,3)、L(χ,4)、L(χ,5)、L(χ,6)・・・の値に対しても、冒頭の予想は成立しているような気がする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.5.5　杉岡幹生

(参考文献)
・「解決！フェルマーの最終定理」(加藤和也著、日本評論社)