# ＜ リーマン予想における零点領域の景色＞

１５年前に、ξ(s)のリーマン予想を古典的な命題に変換したのであるが、それを再考している。
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page132.htm「ヘール・ボップ彗星　その１」
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page190.htm「クラーク彗星　その１」

上記で示した一連の結果は、曖昧模糊としたリーマン予想を分かりやすい古典的命題に変換できたと思われ、意味があるものと思っている。依然リーマン予想が難解なことには変わりないが、考察しやすくなったかもしれない。なお、そこでは対称的に見たいために log1 はゼロではなく、log1 のままにしている。

これらの命題に対し、これまで一年に一度ほど挑戦しては跳ね返されてきたのであるが、今回いくつか気づいた点があり、メモしておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●予想 A-1 と予想 A-3

**予想 A-1** （ξ(s)リーマン予想と同値）

c を 0＜c＜1 の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。
この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が 1/2 のときのみであろう。

$$\cos(x\cdot\log 1)/1^c - \cos(x\cdot\log 2)/2^c + \cos(x\cdot\log 3)/3^c - \cos(x\cdot\log 4)/4^c + \cdots = 0$$

$$\sin(x\cdot\log 1)/1^c - \sin(x\cdot\log 2)/2^c + \sin(x\cdot\log 3)/3^c - \sin(x\cdot\log 4)/4^c + \cdots = 0$$

この予想 A-1 は簡潔で美しい。これ自体が正しいことは非自明な零点を使った幾多の数値実験で分かっている。

冒頭のサイトでの実験でわかったことは、c=1/2 での各方程式にはξ(s)非自明零点の虚部（i・αのαのこと）を解にもつだけでなく、興味ないガラクタ解もたくさんもっていて、そのガラクタ解が考察の邪魔をしてきた（二方程式を“同時に”満足する実数解がξ(s)非自明零点の虚部 i・αのαとなる)。

さて、今回これまであまりよく見てこなかった「ヘール・ボップ彗星　その１」の予想 A-3 も重要だと思えてきた。

予想 A-3 （リーマン予想と同値）

c を 0＜c＜1 の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。
この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が 1/2 のときのみであろう。

$$
\begin{aligned}
&(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1+\pi/4)-(1/2^c)\cdot\cos(x\cdot\log 2+\pi/4)\\
&\quad+(1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3+\pi/4)-(1/4^c)\cdot\cos(x\cdot\log 4+\pi/4)\\
&\qquad+(1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5+\pi/4)-(1/6^c)\cdot\cos(x\cdot\log 6+\pi/4)\\
&\qquad\quad+\cdots\cdots=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1-\pi/4)-(1/2^c)\cdot\cos(x\cdot\log 2-\pi/4)\\
&\quad+(1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3-\pi/4)-(1/4^c)\cdot\cos(x\cdot\log 4-\pi/4)\\
&\qquad+(1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5-\pi/4)-(1/6^c)\cdot\cos(x\cdot\log 6-\pi/4)\\
&\qquad\quad+\cdots\cdots=0
\end{aligned}
$$

これをよく見ると、下の方程式の x を-x に置き換えると、それは上の方程式に一致する！
上の方程式の左辺を $f_1(x)$、下の方程式の左辺を $f_2(x)$ とおくと、$f_1(x)=f_2(-x)$ となる。これは、グラフで考えれば、$y=f_1(x)$ と $y=f_2(x)$ が、y 軸に対して対称（鏡映）になっていることを意味する。よって、両関数のガラクタ解も y 軸に対し対称的に存在することになる。

すなわち、$f_1(x)$ と $f_2(x)$ は、解での因数分解の形に書き直すと、次のようになっているはずである。

$f_1(x)=\{(x^2-\alpha_1^2)(x^2-\alpha_2^2)(x^2-\alpha_3^2)\cdot\cdot\}\{(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)\cdot\cdot\}$
$f_2(x)=\{(x^2-\alpha_1^2)(x^2-\alpha_2^2)(x^2-\alpha_3^2)\cdot\cdot\}\{(-x-\beta_1)(-x-\beta_2)(-x-\beta_3)\cdot\cdot\}$

ここで $\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$・・は $\zeta(s)$ の非自明な零点 $1/2+i\cdot\alpha_n$ の虚部の $\alpha_n$（実数）である。$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$・・がガラクタ解である。

＜リーマン予想が解ける場合は・・＞で述べたように、予想 A-1 の考察からガラクタ解も二種類を考えたりして複雑だったのであるが、予想 A-3 では一種類のガラクタ解に変換できたので、だいぶすっきりした印象がある。
しかし、ガラクタ解は存在するわけで、リーマン予想がまだまだ難解であることには変わりがない。

● “ガラクタ解”などと上で表現したが、リーマン予想が解けるまではガラクタであっても、リーマン予想が解けた後では、そのガラクタ解の構造が詳しく調べられるはずである。
　そして、「ガラクタ解はガラクタではなく、じつはこんな深い意味をもっていたのだ！」というふうになるはずである。

●予想 A-2 でも面白いことが見えてきた。予想 A-2 は次のものである。

**予想 A-2**　（ζ（s）リーマン予想と同値）

ｃを０＜ｃ＜１の実数とする。次のｘに関する二つの無限次方程式を考える。
この二方程式を同時に満足する実数解が存在するのはｃが 1/2 のときのみであろう。

$$
\begin{aligned}
&1-\{1/2^c-1/3^c+1/4^c-\cdots\}\\
&+\{(\log 2)^2/2^c-(\log 3)^2/3^c+(\log 4)^2/4^c-(\log 5)^2/5^c+\cdots\}x^2/2!\\
&-\{(\log 2)^4/2^c-(\log 3)^4/3^c+(\log 4)^4/4^c-(\log 5)^4/5^c+\cdots\}x^4/4!\\
&+\{(\log 2)^6/2^c-(\log 3)^6/3^c+(\log 4)^6/4^c-(\log 5)^6/5^c+\cdots\}x^6/6!\\
&-\{(\log 2)^8/2^c-(\log 3)^8/3^c+(\log 4)^8/4^c-(\log 5)^8/5^c+\cdots\}x^8/8!\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{(\log 2)^1/2^c-(\log 3)^1/3^c+(\log 4)^1/4^c-(\log 5)^1/5^c+\cdots\}x^1/1!\\
&-\{(\log 2)^3/2^c-(\log 3)^3/3^c+(\log 4)^3/4^c-(\log 5)^3/5^c+\cdots\}x^3/3!\\
&+\{(\log 2)^5/2^c-(\log 3)^5/3^c+(\log 4)^5/4^c-(\log 5)^5/5^c+\cdots\}x^5/5!\\
&-\{(\log 2)^7/2^c-(\log 3)^7/3^c+(\log 4)^7/4^c-(\log 5)^7/5^c+\cdots\}x^7/7!\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=0
\end{aligned}
$$

これまで｛ ｝内の log の級数に関しては、あまりよく調べてこなかった。それを An(x)とでも表現すると、次となる。

$$An(x)=(\log 2)^n/2^c-(\log 3)^n/3^c+(\log 4)^n/4^c-(\log 5)^n/5^c+\cdots$$

しかし、この An(x)級数はリーマン予想の中心に位置するものであり、なにかあるにちがいない。

「ヘール・ボップ彗星　その１」では、
　{} 内の log の級数は全て収束します（厳密な証明はまだですが、数値実験から間違いない）。
と述べたが、ここは修正の必要があるかもしれない。

今回、ｃの値を変えて An(x)に対し Excel でいろいろと数値実験したが、その挙動がなかなか面白いのである。それを一言で述べるのはむずかしいが、次のようになっているような気がする。ここで、n は 0 以上の整数。

リーマン予想が成り立つ c＝1/2 の場合、An(x)級数はすべての n で収束する。
C＞1/2 の場合、An(x)級数はすべての n で収束する。
C＜1/2 の場合、An(x)級数が収束する n は有限個しかない。

まとめると、次のようになっているのではないか。
C≥1/2 の場合、An(x)級数はすべての n で収束する。
C<1/2 の場合、An(x)級数が収束する n は有限個しかない。

リーマン予想の c＝1/2 は、An(x)級数がすべての n で収束するしないの分水嶺になっているのではないか。そのぎりぎりの地点が c＝1/2 なのではないか。
（実験の数も多くなくまだ確信がもてる感じでもない。間違っている可能性もある。読者の考察に期待したい。）

●もし一つ上で述べたことが成り立っているとしたら、その観点からリーマン予想を見た場合、ＡＢＣ予想やロスの定理のような（ディオファントス近似のような）非常に難しい問題になっているとも言える。

ロスの定理は、リウヴィルの定理の究極の改良版であり、幾多の大数学者が改良に改良を重ねてきて（近似精度をどんどんと緩めてきて）、最後にロスが最良の結果を得たものである。ロスはそれで 1958 年にフィールズ賞を得た。

ロスは、「 αを有理数でない実数で、ｄ次の整数係数の多項式の根とした場合、

$$|\alpha - p/q| < 1/q^{\rho}$$

を満たす既約分数 p/q は、ρ＞2 ならば、有限個しかない。」という結果を示した。このもっとも緩い近似でも有限性が言える！という内容である。
ρ＝2.0000001 だと既約分数は有限個しかない。ρ＝2 になったとたん無限個ある！ことになる。

もし一つ上での考察が正しいならば、リーマン予想はロスの定理と似ていることになるのだが、果たしてどうなのか。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.4.25　杉岡幹生

（参考文献）

・「発見・予想を積み重ねる－それが整数論」（安福悠著、オーム社）