＜ Q(√m)と Q(√−m)のゼータを同時に作る分割が存在する(予想) 、Q(√6)と Q(√−6)＞

予想の確認の続きである。前回は Q(√5)と Q(√−5)で予想が成立していることを見た。

今回は、実２次体 Q(√6)と虚２次体 Q(√−6)で確認する。すなわち、m＝6 での両２次体それぞれのゼータを同時に作ることができる分割が存在することを見る。

注記：予想の中の文言、「m は平方数でない・・」を、「m は平方因子を含まない・・」に変えた。２次体の定義の箇所で、「解決！フェルマーの最終定理」(日本評論社)では前者だが、「数論への出発」(日本評論社)では後者の意味で書かれている。後者の方がより厳密であると思われ、少なくともこの予想には適している。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜予想(改良版)＞

部分分数展開式①と、それを１回微分した式②の x に、複数の k を用いて k/(2m)を代入することで、虚２次体 Q(√−m)、実２次体 Q(√m)のそれぞれのゼータを同時に構成する分割を得ることができる。
ここで、m は平方因子を含まない自然数であり、k は 1≤k<2m を満たす自然数である。

$1/(1^2-x^2)\quad +1/(3^2-x^2)\quad +1/(5^2-x^2)\quad +\cdots =(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$ −−−−①

$1/(1^2-x^2)^2 +1/(3^2-x^2)^2 +1/(5^2-x^2)^2 +\cdots=(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2) -\{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2)$ −−−②

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回の m＝6 のケースを具体的に述べると、次のようになる。

①と②の x に 11/12, 7/12, 5/12, 1/12 を代入することで、虚２次体 Q(√−6)ゼータ LE(1)の４分割ができ、同時に実 2 次体 Q(√6)ゼータ LG(2)の４分割ができる。

ここで、LE(s)は虚２次体 Q(√−6)のゼータ関数である(導手 N＝24)。これはディリクレのL関数 L(χ,s) の一種であり、次のものである。

$LE(s)=1 +1/5^s +1/7^s +1/11^s -/13^s -1/17^s -1/19^s\ \ -1/23^s +$
$\qquad +1/25^s\ \ +1/29^s +1/31^s +1/35^s -/37^s -1/41^s -1/43^s\ \ -1/47^s +\cdots$

ディリクレ指標 χ(n)は、n≡1 or 5 or 7 or 11 mod 24 のとき χ(n)＝1, n≡13 or 17 or 19 or 23 mod 24 のとき χ(n)＝−1, その他のとき χ(n)＝0 となる。

s＝1 の LE(1)の値は次となる。この値は虚 2 次体の類数公式からわかる。

$LE(1)=1 +1/5 +1/7 +1/11 -1/13 -1/17 -1/19\ \ -1/23 +1/25 +1/29 +1/31 +1/35 -1/37 -1/41 -1/43\ \ -1/47 +\cdots$
$=\pi/\sqrt{6}$

この値は、以降に見るように分割の方法でも出る。なお、LE(s)は本シリーズの(その66)でも登場した。

また、LG(2)は実 2 次体 Q(√6)ゼータ LG(s)の s＝2 のものである。LG(s)も L(χ,s)の一種で次の形をしたものである。

$LG(s)=1 +1/5^s -1/7^s -1/11^s -1/13^s -1/17^s +1/19^s +1/23^s$

$+1/25^s +1/29^s -1/31^s -1/35^s -1/37^s -1/41^s +1/43^s +1/47^s + \cdots$

LG(s)は、mod 24 に対応したディリクレ指標 $\chi(a)$をもち、
「 a≡1 or 5 or 19 or 23 mod 24--> $\chi(a)=1$、 a≡7 or 11 or 13 or 17 mod 24 --> $\chi(a)=-1$、 それ以外の a では $\chi(a)=0$」という $\chi(a)$に対応した L(χ ,s)となる。この $\chi(a)$の導手 N は N=24 である。
LG(s)ゼータは、私は16年も前に研究していた。http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page095.htm
念のため、平方剰余の相互法則を使って上記の級数の形が正しいことを、今回再度確認した。OKである。

なお、"LG()"や"LE( )"という記号は、私が独自に以前から用いているものであり、一般的な記号ではないので注意いただきたい。

今回も過去の結果を一部利用する。この m=6 のケースでは、LE(1)4分割は、(その66)で得ている結果を流用する。LG(2)4分割は(その79)のζ(2)6分割のものと実質的に同じになるが、しかし厳密にするために計算し直した。

では、m=6 のケースを検証しよう。

＜m=6 の場合の予想の検証＞

予想中の②の x に 11/12 を代入して、次を得る。

$(12^4/22^2)(A -a/11)=(\pi^2 \cdot 12^2/(4^2 \cdot 11^2))/\cos^2(11\pi/24) -(\pi \cdot 12^3/(8 \cdot 11^3))\tan(11\pi/24)$ ------③

ここで、左辺の A, a は次のものである。

$A=1 + 1/23^2 +1/25^2 +1/47^2 + 1/49^2 +1/71^2 + \cdots$

$a=1 -1/23 +1/25 -1/47 +1/49 -1/71 + \cdots$

②の x に 7/12 を代入して、次を得る。

$(12^4/14^2)(B -b/7)=(\pi^2 \cdot 12^2/(4^2 \cdot 7^2))/\cos^2(7\pi/24) -(\pi \cdot 12^3/(8 \cdot 7^3))\tan(7\pi/24)$ ------④

ここで、左辺の B, b は次のものである。

$B=1/5^2 + 1/19^2 +1/29^2 +1/43^2 + 1/53^2 +1/67^2 + \cdots$

$b=1/5 -1/19 +1/29 -1/43 +1/53 -1/67 + \cdots$

②の x に 5/12 を代入して、次を得る。

$(12^4/10^2)(C -c/5)=(\pi^2 \cdot 12^2/(4^2 \cdot 5^2))/\cos^2(5\pi/24) -(\pi \cdot 12^3/(8 \cdot 5^3))\tan(5\pi/24)$ ------⑤

ここで、左辺の C, c は次のものである。

$C=1/7^2 + 1/17^2 +1/31^2 +1/41^2 + 1/55^2 +1/65^2 + \cdots$

$c=1/7 -1/17 +1/31 -1/41 +1/55 -1/65 + \cdots$

②の x に 1/12 を代入して、次を得る。

$(12^4/2^2)(D -d)=(\pi^2 \cdot 12^2/(4^2 \cdot 1^2))/\cos^2(\pi/24) -(\pi \cdot 12^3/(8 \cdot 1^3))\tan(\pi/24)$ ------⑥

ここで、左辺の D, d は次のものである。

$D=1/11^2+1/13^2+1/35^2+1/37^2+1/59^2+1/61^2+\cdot\cdot$

$d=1/11-1/13+1/35-1/37+1/59-1/61+\cdot\cdot$

さて、③～⑥左辺の a, b, c, d の値は、予想中の①の x に 11/12, 7/12, 5/12, 1/12 を代入した結果として既に(その66)の LE(1) 4 分割で得ている。その結果を流用すると、a～d の値は次となる(右辺)。

$a=\ 1-1/23+1/25-1/47+1/49-1/71+\ \cdot\cdot\ =(\pi/24)\tan(11\pi/24)$

$b=1/5-1/19+1/29-1/43+1/53-1/67+\ \cdot\cdot=(\pi/24)\tan(7\pi/24)$

$c=1/7-1/17+1/31-1/41+1/55-1/65+\cdot\cdot\ =(\pi/24)\tan(5\pi/24)$

$d=1/11-1/13+1/35-1/37+1/59-1/61+\cdot\cdot\ =(\pi/24)\tan(\pi/24)$

これら a, b, c, d 値(右辺値)を③～⑥に代入すると、A, B, C, D の値として次を得る(右辺)。

$A=\ 1+1/23^2+1/25^2+1/47^2+1/49^2+1/71^2+\ \cdot\cdot\cdot\ =(\pi/24)^2/\cos^2(11\pi/24)$

$B=1/5^2+1/19^2+1/29^2+1/43^2+1/53^2+1/67^2+\cdot\ \cdot\cdot=(\pi/24)^2/\cos^2(7\pi/24)$

$C=1/7^2+1/17^2+1/31^2+1/41^2+1/55^2+1/65^2+\ \cdot\cdot\cdot=(\pi/24)^2/\cos^2(5\pi/24)$

$D=1/11^2+1/13^2+1/35^2+1/37^2+1/59^2+1/61^2+\ \cdot\cdot=(\pi/24)^2/\cos^2(\pi/24)$

これで準備は整った。

”a +b+ c +d”と“A +B −C −D“を計算すると、次のようにと LE(1)と LG(2)ができてくる！

$a+b+c+d$

$=1+1/5+1/7+1/11-/13-1/17-1/19\ \ -1/23+1/25+1/29+1/31+1/35-/37-1/41-1/43\ \ -1/47+\cdot\cdot\cdot$

$=LE(1)=(\pi/24)\{\tan(11\pi/24)+\tan(7\pi/24)+\tan(5\pi/24)+\tan(\pi/24)\}\boldsymbol{=\pi/\sqrt{6}}$

$A+B-C-D$

$=1+1/5^2-1/7^2-1/11^2-1/13^2-1/17^2+1/19^2+1/23^2+1/25^2+1/29^2-1/31^2-1/35^2-1/37^2-1/41^2+1/43^2+1/47^2$
$+\ \cdot\cdot\cdot\ =LG(2)=(\pi/24)^2\{1/\cos^2(11\pi/24)+1/\cos^2(7\pi/24)-1/\cos^2(5\pi/24)-1/\cos^2(\pi/24)\}\boldsymbol{=\pi^2/(4\sqrt{6})}$

結局、A, B, −C, −D が LG(2)の4分身であり、a, b, c, d が LE(1)の4分身となっている。最右辺値は、上記式でのの三角関数の計算(手計算)で簡単に出る。

このように予想中の①、②の x に 11/12, 7/12, 5/12, 1/12 を代入することで、LE(1) と LG(2)の4分割が同時に得られることが分かった。また、それぞれのゼータの特殊値が求まったことにも注目したい。

よって、m＝6 での予想の正しさが確認できた。
(検証終わり)

このようにして、m＝6 での成立が確認できた。

二つの部分分数展開式に x に 11/12, 7/12, 5/12, 1/12 を代入することで、Q(√−6) と Q(√6)の各ゼータの4分割が同時に得られ、その分身から各ゼータが構成される(特殊値が求まる！)というこの美しい構造を味わっていただきたい。

LG(2)と LE(1)の二式を再掲しよう。値の分母が√6 で揃っていて、とてもきれいである。なにかを暗示しているかのようである。

$$LG(2)=1+1/5^2-1/7^2-1/11^2-1/13^2-1/17^2+1/19^2+1/23^2$$
$$+1/25^2+1/29^2-1/31^2-1/35^2-1/37^2-1/41^2+1/43^2+1/47^2+\cdots=\pi^2/(4\sqrt{6})$$

$$LE(1)=1+1/5+1/7+1/11-/13-1/17-1/19-1/23$$
$$+1/25+1/29+1/31+1/35-/37-1/41-1/43-1/47+\cdots\cdots=\pi/\sqrt{6}$$

今回は、m＝6 のケースを見たが、次回以降で m＝7、10 などを確かめていきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●LE(1)の値は、今回見たように類数公式によらなくても、分割の方法でまったく簡単に出る。

$$LE(1)=1+1/5+1/7+1/11-/13-1/17-1/19-1/23$$
$$+1/25+1/29+1/31+1/35-/37-1/41-1/43-1/47+\cdots\cdots=\pi/\sqrt{6}$$

$$LG(2)=1+1/5^2-1/7^2-1/11^2-1/13^2-1/17^2+1/19^2+1/23^2$$
$$+1/25^2+1/29^2-1/31^2-1/35^2-1/37^2-1/41^2+1/43^2+1/47^2+\cdots=\pi^2/(4\sqrt{6})$$

類数公式という高級なものを用いずとも、身の回りの食材である三角関数で、あっさりと求まる。(類数公式はそもそも s＝2 の LG(2)には無力)

●今回の m＝6 のケースではどちらのゼータ値にも分母に√6 が出た。

m＝5 のケースでは、どちらのゼータ値にも分母に√5 が出た。(⇒(その193)

m＝3 のケースでは、どちらのゼータ値にも分母に√3 が出た。⇒(その192)

m＝2 のケースでは、どちらのゼータ値にも分母に√2 が出た。⇒(その191)

これはもうなにかあるとしかおもえない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021. 4. 3　杉岡幹生

(参考文献)

・「解決！フェルマーの最終定理」(加藤和也著、日本評論社)

・「数論への出発」(藤崎源二郎、森田康夫、山本芳彦著、日本評論社)