＜ Q(√m)と Q(√-m)のゼータを同時に作る分割が存在する(予想)、Q(√5)と Q(√-5)＞

予想の確認の続きである。前回は Q(√3)と Q(√−3)で予想が成立していることを見た。

今回は、実2次体 Q(√5)と虚2次体 Q(√−5)で確認する。すなわち、両2次体それぞれのゼータを同時に作ることができる分割が存在することを、m＝5 のケースで見る。

ただし、前回(その192)の最後で予想を改良した(精密化した)ので、その改良版の方を今後は使っていく。次のものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜予想(改良版)＞

部分分数展開式①と、それを1回微分した式②の x に、複数の k を用いて k/(2m)を代入することで、実2次体 Q(√m)、虚2次体 Q(√−m)のそれぞれのゼータを同時に構成する分割を得ることができる。
ここで、m は平方数でない自然数であり、k は 1≤k<2m を満たす自然数である。

$$1/(1^2-x^2)\ \ +1/(3^2-x^2)\ \ +1/(5^2-x^2)\ \ +\cdots =(\pi/(4x))\tan(\pi x/2) \quad ----①$$

$$1/(1^2-x^2)^2\ +1/(3^2-x^2)^2\ +1/(5^2-x^2)^2\ +\cdots=(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2)\ -\{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2) \quad ---②$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回の m＝5 のケースを具体的に述べると、次のようになる。

②と①の x に 9/10, 7/10, 3/10, 1/10 を代入することで、実 2 次体 Q(√5)ゼータ Ln(2)の4分割ができ、同時に虚2次体 Q(√−5)ゼータ Lc(1)の4分割ができる。

ここで、LN(2)は、実 2 次体 Q(√5)ゼータ LN(s)と本質的に等しい Ln(s)の s＝2 のものである。LN(s)は、ディリクレのL関数 L(χ,s)の一種で次の形をしたものである(導手 N＝5)。詳細は(その38)を参照されたい。

$$LN(s)=1\ -1/2^s\ -1/3^s\ +1/4^s\ +1/6^s\ -1/7^s\ -1/8^s\ +1/9^s\ +1/11^s\ -1/12^s\ -1/13^s\ +1/14^s\ +\cdots$$

また Ln(s)は、次となる。

$$Ln(s)=1\ -1/3^s\ -1/7^s\ +1/9^s\ +1/11^s\ -1/13^s-1/17^s+1/19^s\ +1/21^s\ -1/23^s\ -1/27^s\ +1/29^s\ +1/31^s\ -1/33^s-1/37^s\ +1/39^s\ \ +\cdots$$

Ln(s)は、LN(s)と本質的に等しい。⇒(その38)

Lc(1)は、虚2次体 Q(√−5)ゼータ Lc(s)の s＝1 のものである。Lc(s)は、ディリクレのL関数 L(χ,s)の一種で次のものである(導手 N＝20)。詳細は、(その10)を参照のこと。

$Lc(1)=1 +1/3^s +1/7^s +1/9^s -1/11^s -1/13^s -1/17^s -1/19^s +1/21^s +1/23^s +1/27^s +1/29^s -1/31^s -1/33^s -1/37^s -1/39^s + \cdot\cdot$

なお、“LN()”や“Ln( )”または“Lc(s)”の記号は、私が独自に以前から用いているものであり、一般的な記号ではないので注意いただきたい。

今回も過去の結果を一部利用する。この m＝5 のケースでは、Lc(1)4分割は(その10)を利用する。Ln(2)4分割は、(その38)の Ln(2) 4 分割と結局同じとなるが、しかし厳密にするために計算し直した。

では、m＝5 のケースを検証しよう。

＜m=5 の場合の予想の検証＞

予想中の②の x に 9/10 を代入して、次を得る。

$(10^4/18^2)(A -a/9)=(\pi^2\cdot 10^2/(4^2\cdot 9^2))/\cos^2(9\pi/20) -(\pi\cdot 10^3/(8\cdot 9^3))\tan(9\pi/20)$ ------③

ここで、左辺の A, a は次のものである。

$A=1 + 1/19^2 +1/21^2 +1/39^2 + 1/41^2 +1/59^2 + \cdot\cdot$

$a=1 -1/19 +1/21 -1/39 +1/41 -1/59 + \cdot\cdot$

②の x に 7/10 を代入して、次を得る。

$(10^4/14^2)(B -b/7)=(\pi^2\cdot 10^2/(4^2\cdot 7^2))/\cos^2(7\pi/20) -(\pi\cdot 10^3/(8\cdot 7^3))\tan(7\pi/20)$ ------④

左辺の B, b は次のものである。

$B=1/3^2 + 1/17^2 +1/23^2 +1/37^2 + 1/43^2 +1/57^2 + \cdot\cdot$

$b=1/3 -1/17 +1/23 -1/37 +1/43 -1/57 + \cdot\cdot$

②の x に 3/10 を代入して、次を得る。

$(10^4/6^2)(C -c/3)=(\pi^2\cdot 10^2/(4^2\cdot 3^2))/\cos^2(3\pi/20) -(\pi\cdot 10^3/(8\cdot 3^3))\tan(3\pi/20)$ ------⑤

左辺の C, c は次のものである。

$C=1/7^2 + 1/13^2 +1/27^2 +1/33^2 + 1/47^2 +1/53^2 + \cdot\cdot$

$c=1/7 -1/13 +1/27 -1/33 +1/47 -1/53 + \cdot\cdot$

②の x に 1/10 を代入して、次を得る。

$(10^4/2^2)(D -d)=(\pi^2\cdot 10^2/4^2)/\cos^2(\pi/20) -(\pi\cdot 10^3/8)\tan(\pi/20)$ ------⑥

左辺の D, d は次のものである。

$D=1/9^2 + 1/11^2 +1/29^2 +1/31^2 + 1/49^2 +1/51^2 + \cdot\cdot$

$d=1/9 -1/11 +1/29 -1/31 +1/49 -1/51 + \cdot\cdot$

さて、③～⑥左辺の a, b, c, d の値は、①の x に 9/10, 7/10, 3/10, 1/10 を代入した結果として既に（その１０）の Lc(1) ４分割で得ている。その結果を流用すると、a～d の値は次となる（右辺）。

$a = 1 - 1/19 + 1/21 - 1/39 + 1/41 - 1/59 + \cdot\cdot = (\pi/20)\tan(9\pi/20)$
$b = 1/3 - 1/17 + 1/23 - 1/37 + 1/43 - 1/57 + \cdot\cdot = (\pi/20)\tan(7\pi/20)$
$c = 1/7 - 1/13 + 1/27 - 1/33 + 1/47 - 1/53 + \cdot\cdot = (\pi/20)\tan(3\pi/20)$
$d = 1/9 - 1/11 + 1/29 - 1/31 + 1/49 - 1/51 + \cdot\cdot = (\pi/20)\tan(\pi/20)$

これら a, b, c, d 値（右辺値）を③～⑥に代入すると、A, B, C, D の値として次を得る（右辺）。

$A = 1 + 1/19^2 + 1/21^2 + 1/39^2 + 1/41^2 + 1/59^2 + \cdot\cdot = (\pi/20)^2/\cos^2(9\pi/20)$
$B = 1/3^2 + 1/17^2 + 1/23^2 + 1/37^2 + 1/43^2 + 1/57^2 + \cdot\cdot = (\pi/20)^2/\cos^2(7\pi/20)$
$C = 1/7^2 + 1/13^2 + 1/27^2 + 1/33^2 + 1/47^2 + 1/53^2 + \cdot\cdot = (\pi/20)^2/\cos^2(3\pi/20)$
$D = 1/9^2 + 1/11^2 + 1/29^2 + 1/31^2 + 1/49^2 + 1/51^2 + \cdot\cdot = (\pi/20)^2/\cos^2(\pi/20)$

これで準備は整った。

“A −B −C +D“と”a +b+ c +d”を計算すると、次のように Ln(2)と Lc(1)ができてくる！

A −B −C +D

$= 1 - 1/3^2 - 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 - 1/13^2 - 1/17^2 + 1/19^2 + 1/21^2 - 1/23^2 - 1/27^2 + 1/29^2 + 1/31^2 - 1/33^2 - 1/37^2 + 1/39^2 + \cdot\cdot$

$= Ln(2) = (\pi/20)^2\{1/\cos^2(9\pi/20) - 1/\cos^2(7\pi/20) - 1/\cos^2(3\pi/20) + 1/\cos^2(\pi/20)\} = \boldsymbol{\pi^2/(5\sqrt{5})}$

a +b +c +d

$= 1 + 1/3 + 1/7 + 1/9 - 1/11 - 1/13 - 1/17 - 1/19 + 1/21 + 1/23 + 1/27 + 1/29 - 1/31 - 1/33 - 1/37 - 1/39 + \cdot\cdot$

$= Lc(1) = (\pi/20)\{\tan(9\pi/20) + \tan(7\pi/20) + \tan(3\pi/20) + \tan(\pi/20)\} = \boldsymbol{\pi/\sqrt{5}}$

結局、A, −B, −C, D が Ln(2)の４分身であり、また a, b, c, d が Lc(1)の４分身となっている。

このように①、②の x に 9/10, 7/10, 3/10, 1/10 を代入することで、Ln(2)と Lc(1)の４分割が同時に得られることが分かった。また、それぞれのゼータの特殊値が求まったことにも注目したい。

よって、m＝5 のケースでの予想の正しさが確認できた。
（検証終わり）

このようにして、m＝5 での成立が確認できた。

Q(√5)と Q(√−5)の各ゼータの分割が同時に得られ、それらの分身から Q(√5)と Q(√−5)の各ゼータが構成される（特殊値が求まる！）というこの美しい構造を味わっていただきたい。

また、ゼータの特殊値が

$Ln(2) = 1 - 1/3^2 - 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 - 1/13^2 - 1/17^2 + 1/19^2 + \cdot\cdot = \boldsymbol{\pi^2/(5\sqrt{5})}$

$Lc(1) = 1 + 1/3 + 1/7 + 1/9 - 1/11 - 1/13 - 1/17 - 1/19 + \cdots = \pi/\sqrt{5}$

となっていて面白い。この類似性はなんなのだろう？

今回は、m＝5 のケースを見たが、次回以降で、m＝6, 7 などを確かめていきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●じつは予想中の②に 3/5, 1/5 を代入すると、驚くべきことに、実 2 次体 Q(√5)の LN(s)の2分割が得られる。
それと同時に次の級数も得られるのだが、正体がつかめず、これについては放っておいた。

$B1 = 1 - 1/4 + 1/6 - 1/9 + 1/11 - 1/14 + 1/16 - 1/19 + \cdots = (\pi/5)\tan(3\pi/10)$

$B2 = 1/2 - 1/3 + 1/7 - 1/8 + 1/12 - 1/13 + 1/17 - 1/18 + \cdots = (\pi/5)\tan(\pi/10)$

そして、さきほどその正体に気づいた。上のB1からB2を引いた"B1−B2"は、なんと3年前に＜分母に5の倍数の項がない交代級数 ＞として佐藤氏サイトに投稿したものと同じであることが分かった！

$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/6 - 1/7 + 1/8 - 1/9 + 1/11 - 1/12 + 1/13 - 1/14 + 1/16 - 1/17 + 1/18 - 1/19 + \cdots$

$= (\pi/5)\sqrt{(2-2/\sqrt{5})}$

上の級数はゼータではないが、ふしぎな感じが漂っている。

● その＜分母に 5 の倍数の項がない交代級数 ＞を投稿したのは、ゼータの分割を発見する直前であった。そして
まもなくゼータの分割を発見し、震えることになる。だいぶ不感症になったが、その震えはいまも続いている。
その豊かな"ゼータ分割鉱山"を掘り進んできて、多くのふしぎな構造や予想、問題に遭遇して、美しい鉱物の原石を眺めてはあまり磨かず、そのまま置いたりして、とにかく掘り進めて3年が経過した。そして冒頭の予想を出した。
長く掘り進んできて、「分割」の兆候とも見られた「分母に 5 の倍数の項がない交代級数」に今回また遭遇したことになる。
最初に入った洞窟と、こんな形で出会うとは思わなかった。

●二つ上で述べた結果から、実 2 次体 Q(√5)の LN(s)の最小分割は、2分割であるとわかる（4分割ではない）。
もしかしたら、実 2 次体側の LN(s)の最小分割が（予想成立の4分割ではなく）2分割であることが、虚2次体 Q(√−5)の類数が 2 となっていることと関係しているのか？とノートに記している。しかし、まったくわからない。
岩澤理論などとは異なる視点からの類数に関する仮説だが、将来のテーマとしたい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021. 3. 21　杉岡幹生

（参考文献）

・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）