

< $Q(\sqrt{m})$ と $Q(\sqrt{-m})$ のゼータを同時に作る分割が存在する(予想) 、 $Q(\sqrt{2})$ と $Q(\sqrt{-2})$ >

前回と前々回で調べた最小分割問題は興味あるテーマだが、まだ明確に類数他との関連が見えないことから、一旦休止としたい。

さて、すこし前に、全く別の興味深い事実(構造)を発見したので、そちらを先に報告したい。それはまだ予想であるが、これまでに4例を調べて(下記参照)、その正しさを確認した。その予想とは次のものである。

=====

< 予想 >

部分分数展開式①と、それを1回微分した式②において、実2次体 $Q(\sqrt{m})$ 、虚2次体 $Q(\sqrt{-m})$ のそれぞれのゼータを同時に作るができる分割が存在する。

$$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \dots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2) \quad \text{---①}$$

$$1/(1^2-x^2)^2 + 1/(3^2-x^2)^2 + 1/(5^2-x^2)^2 + \dots = (\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2) - \{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2) \quad \text{---②}$$

=====

ちなみに、②はと(2)分割で何度も登場した式である。その時は $-\{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2) = \text{others}(x)$ としていたが。

上の文だけではわかりにくいかもしれない。具体的に述べると、この予想は次のようなものである。

②と①の x に $3/4$ と $1/4$ を代入すると、実2次体 $Q(\sqrt{2})$ ゼータ $L1(2)$ の2分割ができ、同時に虚2次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ $L2(1)$ の2分割ができる。

②と①の x に $5/6$ と $1/6$ を代入すると、実2次体 $Q(\sqrt{3})$ ゼータ $LB(2)$ の2分割ができ、同時に虚2次体 $Q(\sqrt{-3})$ ゼータ $La(1)$ の2分割ができる。

②と①の x に $9/10$ 、 $7/10$ 、 $3/10$ 、 $1/10$ を代入すると、実2次体 $Q(\sqrt{10})$ ゼータ $Ln(2)$ の4分割ができ、同時に虚2次体 $Q(\sqrt{-10})$ ゼータ $Lc(1)$ の4分割ができる。

②と①の x に $11/12$ 、 $7/12$ 、 $5/12$ 、 $1/12$ を代入すると、実2次体 $Q(\sqrt{6})$ ゼータ $LG(2)$ の4分割ができ、同時に虚2次体 $Q(\sqrt{-6})$ ゼータ $LE(1)$ の4分割ができる。

この4例で、これまで予想の正しさを確認している。

面白い予想と思われないだろうか。 $Q(\sqrt{m})$ と $Q(\sqrt{-m})$ が常に対になっているのである！このようなきれいな構造が存在していたのである。

両2次体のゼータは、このような形で互いに関連し合っていると考えられる。

今回は予想の $m=2$ の $Q(\sqrt{2})$ 、 $Q(\sqrt{-2})$ のケース、つまり次を確認することにしよう。

②と①の x に $3/4$ と $1/4$ を代入すると、実2次体 $Q(\sqrt{2})$ ゼータ $L(2)$ の2分割ができ、同時に虚2次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ $L(1)$ の2分割ができる。

これを確認する。

その際、本シリーズで行ってきた過去の①での結果を利用する。 $m=2$ のケースでは、 $L(1)$ 2分割の(その14)を利用することになる。

なお、 $L(1)$ や $L(2)$ の記法は、私が独自に昔から用いているものであり、一般的な記法ではないので注意いただきたい。

では、 $m=2$ のケースを検証しよう。

< $m=2$ の場合の予想の検証>

②の x に $3/4$ を代入すると、次のようになる。

$$(4^4/6^2)(A - a/3) = (\pi^2 \cdot 4^2 / (4^2 \cdot 3^2)) / \cos^2(3\pi/8) - (\pi \cdot 4^3 / (8 \cdot 3^3)) \tan(3\pi/8) \quad \text{-----} \textcircled{3}$$

ここで、左辺の A , a は次のものである。

$$A = 1 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/15^2 + 1/17^2 + 1/23^2 + \dots$$

$$a = 1 - 1/7 + 1/9 - 1/15 + 1/17 - 1/23 + \dots$$

②の x に $1/4$ を代入すると、次のようになる。

$$(4^4/2^2)(B - b) = (\pi^2 \cdot 4^2 / 4^2) / \cos^2(\pi/8) - (\pi \cdot 4^3 / 8) \tan(\pi/8) \quad \text{-----} \textcircled{4}$$

ここで、左辺の B , b は次のものである。

$$B = 1/3^2 + 1/5^2 + 1/11^2 + 1/13^2 + 1/19^2 + 1/21^2 + \dots$$

$$b = 1/3 - 1/5 + 1/11 - 1/13 + 1/19 - 1/21 + \dots$$

さて、 a と b の値は、①の x に $3/4$, $1/4$ を代入した結果として既に(その14)で得ている。その結果の A_1 , A_2 を流用すると(A_1 が a に、 A_2 が b に対応)、 a , b の値は次となる(右辺)。

$$a = 1 - 1/7 + 1/9 - 1/15 + 1/17 - 1/23 + \dots = (\pi/8) \tan(3\pi/8)$$

$$b = 1/3 - 1/5 + 1/11 - 1/13 + 1/19 - 1/21 + \dots = (\pi/8) \tan(\pi/8)$$

この a , b の値を③、④に入れると、 A , B の値は次となる(右辺)。

$$A = 1 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/15^2 + 1/17^2 + 1/23^2 + \dots = (\pi/8)^2 / \cos^2(3\pi/8)$$

$$B = 1/3^2 + 1/5^2 + 1/11^2 + 1/13^2 + 1/19^2 + 1/21^2 + \dots = (\pi/8)^2 / \cos^2(\pi/8)$$

ここで、 $A - B$ と $a + b$ を計算しよう。すると、次のように $L1(2)$ と $L2(1)$ ができてくる！

$$\begin{aligned} A - B &= 1 - 1/3^2 - 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 - 1/11^2 - 1/13^2 + 1/15^2 + 1/17^2 - 1/19^2 - 1/21^2 + 1/23^2 + \dots \\ &= L1(2) = (\pi/8)^2 \{1/\cos^2(3\pi/8) - 1/\cos^2(\pi/8)\} = \pi^2/(8\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b &= 1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - 1/13 - 1/15 + 1/17 + 1/19 - 1/21 - 1/23 + \dots \\ &= L2(1) = (\pi/8) \{\tan(3\pi/8) + \tan(\pi/8)\} = \pi/(2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

結局、 $A, -B$ が $L1(2)$ の2分身であり、また a, b が $L2(1)$ の2分身となっている。

このように①、②の x に $3/4, 1/4$ を代入することで、 $L1(2)$ と $L2(1)$ の2分割が同時に得られることが分かった。

よって、 $m=2$ のケースでの予想の正しさが確認できた。

なお、 $L1(2)$ や $L2(1)$ の詳細については(その59)、(その54)を参照されたい。

注記：(その13)で の $\zeta(2)$ 2分割の各分身の値も、厳密には上記のようにして求められるものである。
(検証終わり)
以上。

今回は、 $m=2$ のケースを見たが、次回以降で、 $m=3, 5, 6$ など確かめていきたい。
この予想、読者はどう思われたであろうか。私には、絶対に正しいと確信できる予想である。

なお、上記結果は、容易に分かるように、 $\zeta(2)$ と $L(1)$ の同時の2分割にもなっている。観察されたい。

それにしても、 $Q(\sqrt{m})$ と $Q(\sqrt{-m})$ が セットで出る とは、美しい構造が存在していたものである。ゼータをやっていると美しいことしか出てこない。

その美は三角関数(フーリエ級数)が生み出している。フーリエ級数にある積分を実行することでたくさんのゼータの香りの漂う公式が生み出される。http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page212.htm

そして、それらの一つが①の部分分数展開式と本質的に同じであることは3年前に気づき、(その14)で言及した。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

●この予想に関し、本当は、「①」と「①を1回微分した式(②)」と「①を2回微分した式」という三つの式からも同様の結果が得られるはずである。

さらに、「①」と「①を1回微分した式(②)」と「①を2回微分した式」と「①を3回微分した式」という四つの式からも同様の結果が得られるはずである。

さらに・・・

と続いていくことは本シリーズの過去の結果から確実である。であるから、予想はバージョンアップできる。

また後に示したい。

●(その59)と(その54)では、実2次体 $Q(\sqrt{2})$ ゼータ $L_1(2)$ や虚2次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ $L_2(1)$ を別々に独立に考察しており、今回の予想のようにセットでの出現には気づいていなかった。このようなことはもっと早く気づくべきであった。

部分分数展開式(ゼータの香りの漂う公式)周辺では、面白いテーマが次から次へと湧き出てきて、それらに目がいてしまい、なかなかこのような大きな視点にはたどり着けなかったというべきか。

部分分数展開式は、手つかずの？大鉱脈である。深く掘らなくとも、宝石の原石がごろごろと出てくる。

魚釣りに例えるならば、豊穡な漁場である。高価な釣り竿や道具は必要ない。タモ網ですくうだけで大物が獲れる。

●冒頭で一旦休止とした最小分割問題は、これはこれで重要であり、将来また調べることになると思う。

● ちょっと前から気になり。①は、群に関係している？ 対称性を備えている。②も同じか。

x を $-x$ に置き換えても、不変である(元のもの)。

x を ix に置き換え、さらにその x を ix に置き換えると、元に戻る。さらに何パターンかあり。。

どの群(の積表)と一致するのか。

$$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \dots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2) \quad \text{---①}$$

$$1/(1^2-x^2)^2 + 1/(3^2-x^2)^2 + 1/(5^2-x^2)^2 + \dots = (\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2) - \{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2) \quad \text{---②}$$

=====

2021.3.6 杉岡幹生

(参考文献)

・「解決！フェルマーの最終定理」(加藤和也著、日本評論社)

・「やさしい群論入門」(藤永茂、成田進著、岩波書店)