＜最小分割問題、実 2 次体 Q(√3) ゼータ LB(s) はζ(s) ３分割から構成できる ＞

２年前に、実 2 次体 Q(√3) に対応するゼータ関数 LB(s) の LB(2) を、Z(2) ６分割での４分身を用いて導いた（その６９）。ここで、Z(2) は本質的にζ(2) に等しいものである（下記参照）。

今回、より少ない数の Z(2) 分割で LB(2) が構成できることが分かったので、それを報告したい。結論を先に述べると、Z(2) ３分割での２分身を使って LB(2) を構成できた。

少し復習をしておこう。LB(s) は、ディリクレのＬ関数 L(χ, s)

$$L(\chi, s) = \chi(1)/1^s + \chi(2)/2^s + \chi(3)/3^s + \chi(4)/4^s + \chi(5)/5^s + \chi(6)/6^s + \chi(7)/7^s + \cdots$$

の一種であり、次のものである。

$$LB(s) = 1 - 1/5^s - 1/7^s + 1/11^s + 1/13^s - 1/17^s - /19^s + 1/23^s + \cdots$$

LB(s) は実 2 次体 Q(√3) に対応するゼータ関数で、導手 N=12 を持つ。ディリクレ指標 χ(n) は次の通り。
n≡1 or 11 mod 12 のとき χ(n)＝1,　n≡5 or 7 mod 12 のとき χ(n)＝-1, その他のとき χ(n)＝0。

よって s＝2 の LB(2) は次となる。

$$LB(2) = 1 - 1/5^2 - 1/7^2 + 1/11^2 + 1/13^2 - 1/17^2 - /19^2 + 1/23^2 + \cdots = \pi^2/(6\sqrt{3}) \quad \text{------①}$$

右辺値 $\pi^2/(6\sqrt{3})$ は、2007 年にテイラーシステムを使って求めた結果を用いた。
http://www5b.biglobe.ne.jp/sugi_m/page157.htm

これまでと同様に、Z(2) の分割を使って求めていくわけだが、Z(s) は次のものであり、本質的にζ(s) に等しい。なぜなら以下のように変形でき、それはζ(s) そのものだからである。

$$Z(s) = 1 + 1/3^s + 1/5^s + 1/7^s + 1/9^s + 1/11^s + \cdots$$

$$\begin{aligned} Z(s) &= 1 + 1/3^s + 1/5^s + 1/7^s + 1/9^s + 1/11^s + \cdots \\ &= 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/5^s + 1/6^s + 1/7^s \cdots - (1/2^s + 1/4^s + 1/6^s + \cdots) \\ &= \zeta(s) - 1/2^s \zeta(s) \\ &= (1 - 1/2^s)\zeta(s) \qquad \text{--------②} \end{aligned}$$

$\zeta(2)$ は $\zeta(2) = \pi^2/6$ であり、②より $Z(2) = \pi^2/8$ となる。

なお “Z(s)” は、筆者が使っている記法で一般的なものではないので注意されたい。

さて、Z(2) の３分割を示す。じつはこれは（その３１）と同じものである。

■Z(2) ３分割

$A1= 1 + 1/11^2 +1/13^2 +1/23^2 + 1/25^2 +1/35^2 + \cdots = (\pi/12)^2/\cos^2(5\pi/12)$

$A2=1/3^2 + 1/9^2 +1/15^2 +1/21^2 + 1/27^2 +1/33^2 + \cdots = (\pi/12)^2/\cos^2(3\pi/12)$

$A3=1/5^2 + 1/7^2 +1/17^2 +1/19^2 + 1/29^2 +1/31^2 + \cdots = (\pi/12)^2/\cos^2(\pi/12)$

ここで、$A1 + A2 + A3 = Z(2) = \pi^2/8$ である。そして、$\underline{A1 - A3 = LB(2) = \pi^2/(6\sqrt{3})}$ である。

念のため、A1～A3 式に対し Excel マクロで数値検証したが、全て左辺の級数は右辺値に収束した。

＝＝

上の分身（分割級数）の導出過程を簡単に述べる。

$1/(1^2-x^2) +1/(3^2-x^2) +1/(5^2-x^2) + \cdots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

上の部分分数展開式を１回微分した次式を利用する。

$1/(1^2-x^2)^2 +1/(3^2-x^2)^2 +1/(5^2-x^2)^2 + \cdots = (\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2) + \mathrm{Others}(x)$ ----③

ここで右辺の Others(x)は、$\mathrm{Others}(x) = -\{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2)$ であるが、無視してよい個所なので Others(x)とした。

③の x に特定の値を代入することで、次のように分身が求まる。

③の x に値 5/6 を代入すると、A1 が得られる。
③の x に値 3/6 を代入すると、A2 が得られる。
③の x に値 1/6 を代入すると、A3 が得られる。

注記：左辺は Z(2)分割級数(分身)だけを拾い、右辺はそれに対応する $(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2)$ の値だけを拾う
すなわち、左辺では Z(2)分割級数以外の級数を無視し、右辺では Others(x)の値は無視する。それで OK。

＝＝

このようにζ(2)の３分割すなわち Z(2)の３分割を使って、まったく簡単に LB(2)が求まった。

$LB(2) = 1 -1/5^2 -1/7^2 +1/11^2 +1/13^2 -1/17^2 -/19^2 +1/23^2 + \cdots = \pi^2/(6\sqrt{3})$ ----①

右辺値の $\pi^2/(6\sqrt{3})$ も、$A1-A3 = (\pi/12)^2 \{1/\cos^2(5\pi/12) - 1/\cos^2(\pi/12)\}$ を計算してすぐに出る。

①のような難しい級数の値が、こんなにも簡単に出ることに感動する。

2007 年にテイラーシステムを使って LB(2)の値 $\pi^2/(6\sqrt{3})$ を求めるやり方も相当に簡単であった。単にテイラー展開（や関数等式）を使うだけである。http://www5b.biglobe.ne.jp/sugi_m/page157.htm

一方、分割の方法では、テイラー展開さえ必要ない。簡単な四則演算で答えが出る。

現代数学でも簡単とは思えないものが、中学生でもできそうな方法で出ることに感動する。

結果を再掲する。

$Z(2)=A1+A2+A3=\pi^2/8$

$LB(2)=A1-A3=\pi^2/(6\sqrt{3})$

これを見ると、ゼータはパーツ（部品）から構成されているとわかるだろう。それはレゴブロックを組み合わせていくかのようである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●最近、とくに大事だと思うのは、目的の 2 次体ゼータがどれだけの少ない数の Z(s)や L(s)の分身から作れるか？という問題である。

それを2次体ゼータに対する Z(s) or L(s)の最小分割または最小分割問題と名付けたい。そして、その分割の数を最小分割数と名付けたい。

（その６９）において、LB(2)は Z(2)６分割での４分身を使って構成できた。今回は、Z(2)３分割から２分身を使って構成できた。今回の方が、より少ない数の分割から構成できたわけである。

分割は $Q(\sqrt{m})$ の m が関係するので、今回の Z(2)３分割が $Q(\sqrt{3})$ の LB(s)を構成するための最小分割と分かった。最小分割数は 3 である。

「各２次体ゼータに対する Z(s)、L(s)の最小分割はいくらか？」という問題をしばらく調べたい。

●今回は LB(2)を調べたが、本シリーズの内容から、当然、LB(4)、LB(6)・・でも、下式と同類の結果が得られる。LB(4)は Z(4)が、LB(6)は Z(6)が・・対応する。レゴブロックの関係はどこまでいっても崩れない。

$Z(2)=A1+A2+A3=\pi^2/8$

$LB(2)=A1-A3=\pi^2/(6\sqrt{3})$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.2.6　杉岡幹生

（参考文献）

・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）