＜ 虚２次体Ｑ(√−11)対応ゼータ LQ(1)の５分割 ＞

虚２次体Ｑ(√−11)に対応するゼータ LQ(1)の５分割が得られたので、報告したい。

流れでいうと、本シリーズの 2018～2019 年にかけて見た虚２次体Ｑ(√−2)、Ｑ(√−3)、Ｑ(√−5)、Ｑ(√−6)、Ｑ(√−7)、実２次体Ｑ(√2)、Ｑ(√3)、Ｑ(√5)に対応するゼータの分割の流れに沿うものである。

今回、新たに調べた虚２次体Q(√−11)に対応するゼータ LQ(s)とは、ディリクレのL関数 L(χ,s)

$$L(\chi,s)=\chi(1)/1^s+\chi(2)/2^s+\chi(3)/3^s+\chi(4)/4^s+\chi(5)/5^s+\chi(6)/6^s+\chi(7)/7^s+\cdots$$

の一種であり、次のものである。

$$LQ(s)=1-1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s-/6^s-1/7^s-1/8^s\quad+1/9^s-/10^s$$

$$+1/12^s-1/13^s+1/14^s+1/15^s+1/16^s-/17^s-1/18^s-1/19^s\quad+1/20^s-/21^s+\cdots$$

この LQ(s)は虚 2 次体 Q(√−11)に対応するゼータ関数で、導手 N＝11 を持つ。

ディリクレ指標 χ(n)は、以下となる。

n≡1 or 3 or 4 or 5 or 9 mod 11 のとき χ(n)＝1

n≡2 or 6 or 7 or 8 or 10 mod 11 のとき χ(n)＝−1

その他のとき χ(n)＝0

s＝1 での LQ(1)は次の通り。

$$LQ(1)=1-1/2+1/3+1/4+1/5-/6-1/7-1/8\quad+1/9-/10$$

$$+1/12-1/13+1/14+1/15+1/16-/17-1/18-1/19\quad+1/20-/21+\cdots$$

$$=\pi/\sqrt{11}\qquad\text{--------①}$$

最後の π/√11 は虚2次体の類数公式から出る。しかし、そのような高級な公式を使わずとも、以下のように分割の手法を使っても、出る。(注記：下方で述べたように、まだ手計算での成立は確認できていない。三角関数での成立は確認できた。)

なお、”LQ()”という記号は私が独自に用いているものであり、一般的なものではないので注意いただきたい。

それでは、今回の結果を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■LQ(1)5分割

A1＝ 1 −1/10 +1/12 −1/21 +1/23 −1/32 +1/34 −1/43+ ・・ ＝(π/11)tan(9π/22)

A2＝1/2 −1/9 +1/13 −1/20 +1/24 −1/31 +1/35 −1/42+ ・・ ＝(π/11)tan(7π/22)

A3＝1/3 −1/8 +1/14 −1/19 +1/25 −1/30 +1/36 −1/41+ ・・ ＝(π/11)tan(5π/22)

A4＝1/4 −1/7 +1/15 −1/18 +1/26 −1/29 +1/37 −1/40+ ・・ ＝(π/11)tan(3π/22)

A5＝1/5 −1/6 +1/16 −1/17 +1/27 −1/28 +1/38 −1/39+ ・・ ＝(π/11)tan(π/22)

A1 −A2 +A3 +A4 +A5＝LQ(1) となる。

念のため、左辺の各級数が右辺値に収束することは、Excel マクロで確認した。

上記の結果の導出過程を簡単に述べる。次の部分分数展開式を使う。

$1/(1^2-x^2)\quad +1/(3^2-x^2)\quad +1/(5^2-x^2)\quad +\cdots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

この x に次の値を代入することで、分割された級数（分身の級数）とその値が求まる。

x に 9/11, 7/11, 5/11, 3/11, 1/11 を代入すると、それぞれ A1, A2, A3, A4, A5 が得られる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように、LQ(1)の5分身が求まった。まったく簡単である。

さて、LQ(1)＝A1 −A2 +A3 +A4 +A5 より、5分割の右辺値に着目して、次を得る。

LQ(1)＝(π/11){tan(9π/22) − tan(7π/22) + tan(5π/22) + tan(3π/22) + tan(π/22)} -----②

ところで、①より LQ(1)＝π/√11 であるから、②より、次となる。

$(1/11)\{\tan(9\pi/22) - \tan(7\pi/22) + \tan(5\pi/22) + \tan(3\pi/22) + \tan(\pi/22)\} = 1/\sqrt{11}$

上式の成立は、Excel の数値計算で確認できた。

手計算は難しくまだ確認できていない。三角関数の公式を使えば、できるはずである。複雑な計算になるだろう。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 「虚２次体の類数」と「L(χ ,s)ゼータの分割」に関する“ある予想”が生まれそうであり、それを確認する実験を行いたいので、２次体に関係するディリクレのL関数 L(χ ,s)の分割を行っている。

２次体には類数が付随するが、今回着目した虚２次体Q(√‾−11)の類数は１である。

●ベイカー・スタークの定理

類数が１の虚２次体Q(√‾−d)は、d が 1，2， 3， 7， 11， 19， 43， 67， 163 の場合に限る。

http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu/2650_j9.htm

上で言及した“ある予想”というのは、ゼータ分割における分身の様子が、虚２次体の類数の値と関係するのではないか？という予想であるが、まだ漠としており、明確にわかっていない。

●じつは 2004 年ごろ、２次体に対応するゼータの分身（分割）を、この「ゼータの香りの漂う・・」シリーズとはまったく違う方面から導いていた。 昔のことで詳細は忘れているが、次の辺りを見直すと、非明示な LQ(2)の分身の級数の形を出して、ある予想を確認している。

・天王星 その２ (2004/7/28) http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page077.htm

ただし、それは級数の出現を見ているだけで、それぞれの分身の値まで求めていない。またその級数はひねりが加わっていて素直な出方ではない。だから LQ(2)にもっていくのにややこしい変形をしている。

いま改めて見直すと、おそらく、π/11 代入だけでなく、3π/11、5π/11、7π/11、9π/11 も代入すると、5つの連立方程式がたって、それぞれの分身の値も求まったはずと思うが、気付いていなかった。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.1.30 杉岡幹生

（参考文献）

・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）

・ベイカー・スタークの定理（その１） http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu/2650_j9.htm

・天王星 その２ (2004/7/28) http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page077.htm