＜ζ(2n)特殊値の分子に現れる素数のふしぎについて（その２）＞

ζ(2n)特殊値の分子の数についての予想の続きである。一つ前の（その１８６）の最後で述べたようにζ(16)でも予想が成り立っているので、今回は、前回のものにζ(16)の結果を加えた形で示しておく。

まず予想を掲げ、そして結果(発見した事実)を羅列する。

＜Z(2n)特殊値の分子に現れる数に関する予想＞

Z(2n)/π^{2n}の値の既約分数の分子に 1 より大きな数が現れる場合、その数は、ゼータの分身(分割級数)を生み出す母等式(生成核)右辺の分子における sin 項ではない定数項の(因数の)奇数の素数を掛けた数になる。

ここで、n は 1 以上の整数。

ここで、Z(s)は次のものであり、ζ(s)と本質的に同じものである。

$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+1/9^s+1/11^s+\cdots$

$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+1/9^s+1/11^s+\cdots$

$\quad=1+1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s+1/6^s+1/7^s\cdots-(1/2^s+1/4^s+1/6^s+\cdots)$

$\quad=\zeta(s)-1/2^s\zeta(s)$

$\quad=(1-1/2^s)\zeta(s)$　-----①

なお、“Z(s)”は、本シリーズで使っている記法であり、一般的なものとは違っているので注意されたい。

以下に、見出した事実を列挙する。分子が 1 となる Z(2)、Z(4)、Z(6)も一応並べておく。

＜発見した事実＞

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■$Z(2)=\pi^2/8=\pi^2/2^3$　　π^2を無視して分子は 1 となっている。

■$Z(4)=\pi^4/96=\pi^4/(2^5\times3)$　　π^4を無視して分子は 1 となっている。

■$Z(6)=\pi^6/960=\pi^6/(2^6\times3\times5)$　　π^6を無視して分子は 1 となっている。

■$Z(8)=17\pi^8/161280=17\pi^8/(2^9\times3^2\times5\times7)$の分子に 17 が現れている。（その１７）参照。

$1/(1^2-x^2)^8+1/(3^2-x^2)^8+1/(5^2-x^2)^8+\cdots$

$\quad=(\pi/(4x))^8\ \{17+180(\sin(\pi x/2))^2+114(\sin(\pi x/2))^4+4(\sin(\pi x/2))^6\}\ /\{315(\cos(\pi x/2))^8\}$

$\quad+\mathrm{Others}(x)$

上記の Z(8)母等式右辺の分子の sin 項でない定数項に 17 が現れている。

■Z(10)＝31π^{10}/2903040＝31π^{10}/(2^{10}×3^4×5×7)の分子に31が現れている。（その20）参照。

$1/(1^2-x^2)^{10}+1/(3^2-x^2)^{10}+1/(5^2-x^2)^{10}+\cdots$

$=(\pi/(4x))^{10}\ \{62+1072(sX)^2+1452(sX)^4+247(sX)^6+2(sX)^8\}/\{2835(cX)^{10}\}\ +\ \mathrm{Others}(x)$

ここで、X＝πx/2、s は sin, c は cos のこと。したがって”sX”、”cX”は、それぞれ sin(πx/2)、cos(πx/2)のことである。

上記の Z(10)の母等式右辺の分子の sin 項でない定数項は 62＝2×31 であり、31 が現れている。

■Z(12)＝691π^{12}/638668800＝691π^{12}/(2^{12}×3^4×5^2×7×11)の分子に691が現れている。（その20）。

$1/(1^2-x^2)^{12}+1/(3^2-x^2)^{12}+1/(5^2-x^2)^{12}+\cdots$

$=(\pi/(4x))^{12}\ \{1382+35396(sX)^2+83021(sX)^4+34096(sX)^6+2026(sX)^8+4(sX)^{10}\}/\{155925(cX)^{12}\}+\mathrm{Others}(x)$

ここで”sX”、”cX”は、それぞれ sin(πx/2)、cos(πx/2)のことである。
上記の Z(12)母等式右辺の分子の sin 項でない定数項は 1382＝2×691 であり、691 が現れている。

■Z(14)＝43×127π^{14}/(2^{13}×3^5×5^2×7×11×13)の分子に43×127が現れている。
（その26）の2分割でも確認できる。

$1/(1^2-x^2)^{14}+1/(3^2-x^2)^{14}+1/(5^2-x^2)^{14}+\cdots=$
$(\pi/(4x))^{14}\{21844+776661(sX)^2+2801040(sX)^4+2123860(sX)^6+349500(sX)^8+8166(sX)^{10}+4(sX)^{12}\}/\{6081075(cX)^{14}\}$
$+\ \mathrm{Others}(x)$

ここで”sX”、”cX”は、それぞれ sin(πx/2)、cos(πx/2)のことである。
上記の Z(14)母等式自体は前回（その１８６）で出したものである。その右辺分子の sin 項でない定数項は 21844＝2^2×43×127 であり、43×127 が現れている。

■Z(16)＝257×3617π^{16}/(2^{17}×3^6×5^3×7^2×11×13)の分子に257×3617が現れている。

$1/(1^2-x^2)^{16}+1/(3^2-x^2)^{16}+1/(5^2-x^2)^{16}+\cdots=$
$(\pi/(4x))^{16}\{929569+43800104(sX)^2+225028452(sX)^4+273021880(sX)^6+88951490(sX)^8+6715896(sX)^{10}+65476(sX)^{12}$
$+8(sX)^{14}\}/\{638512875(cX)^{16}\}\ +\ \mathrm{Others}(x)$

ここで”sX”、”cX”は、それぞれ sin(πx/2)、cos(πx/2)のことである。
上記の Z(16)母等式は初めて出したものである。右辺分子の sin 項でない定数項は 929569＝257×3617 であり、257×3617 が現れている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

以上のようになっている。予想の通りになっていることを確認いただきたい。

＜Z(2n)特殊値の分子に現れる数に関する予想＞

Z(2n)/π^{2n}の値の既約分数の分子に1より大きな数が現れる場合、その数は、ゼータの分身（分割級数）を生み出す母等式（生成核）右辺の分子におけるsin項ではない定数項の（因数の）奇数の素数を掛けた数になる。

ここで、nは1以上の整数。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、以下をメモしておく。

****

●母等式からZ(16)2分割（2分身）A1，A2を求めると、次となる。母等式のxにそれぞれ3/4，1/4を代入すると、出る。

$A1 = 1 + 1/7^{16} + 1/9^{16} + 1/15^{16} + 1/17^{16} + 1/23^{16} + \cdots$

$= \alpha^{16}\{929569+43800104(s\beta)^2+225028452(s\beta)^4+273021880(s\beta)^6+88951490(s\beta)^8+6715896(s\beta)^{10}+65476(s\beta)^{12}+8(s\beta)^{14}\}/\{638512875(c\beta)^{16}$

$A2 = 1/3^{16} + 1/5^{16} + 1/11^{16} + 1/13^{16} + 1/19^{16} + 1/21^{16} + \cdots$

$= \alpha^{16}\{929569+43800104(s\alpha)^2+225028452(s\alpha)^4+273021880(s\alpha)^6+88951490(s\alpha)^8+6715896(s\alpha)^{10}+65476(s\alpha)^{12}+8(s\alpha)^{14}\}/\{638512875(c\alpha)^{16}$

もちろん、A1+A2＝Z(16)である。 ここで$\alpha=\pi/8$、$\beta=3\pi/8$とし、sinを”s”、cosを”c”と略記した。
例えば、sin(π/8)は”sα”、cos(3π/8)は”cβ”などとしている。

●ζ(16)でも、2年半前に出した「奇数出現位置予想」と「分子の和が分母に一致する予想」が成り立っていることを確認しておこう。

・奇数出現位置予想（その25）（その26）

Z(16)つまりζ(16)ではm＝16である。また上記の分身A1，A2の分子に出た奇数929569でのsinの指数は0である（例えばA1では、929569 ×(sβ)^{0}と解釈）。よって、m +p＝16 +0＝2^4となり、奇数出現位置予想は成り立っている。

・分子和が分母に一致する予想（その18）、（その19）、（その20）

Z(16)の分身A1，A2の分子のsin項の係数と分母のcosの係数を眺めると、次のようになっている。分子の定数も(sin○)^{0}と解釈して、含める。

分子和＝929569 +43800104 +225028452 +273021880 +88951490 +6715896 +65476 +8＝638512875

分母＝638512875

よって、分子和が分母の数に一致し、予想は成り立っている。

****

2021.1.16　杉岡幹生