# ＜ζ(2n)特殊値の分子に現れる素数のふしぎについて＞

ζ(2n)特殊値の分子に現れる数について新たに発見したことがあり、今回はそれを示したい。それは２年前に（その７０）で述べた次の問題に関するものである。

*************************************************************

（1）例えば、ζ(12)の特殊値”$691\pi^2/638512875$”について、分子に突然 691 という素数が出現する理由をクンマーの理論や岩澤理論とは別視点から説明せよ。

ζ(12)分割級数の生成核関数を使えば、691 が出現する理由がわかるのではないか。

*************************************************************

この問題はこれまでメインのものとしては扱ってこなかったが、ζ(s)値の分子の値のふしぎについては岩澤理論などでも重要なテーマであって、頭の片隅で気になってきたものである。ζ(2)～ζ(10)とは違って、ζ(12)で、突如分子に 691 などという素数が現れるのはとても不思議なことに感じられ、やはり気になる。

まず発見した事実（予想）を述べると、次のようになる。

## ＜Z(2n)特殊値の分子に現れる数に関する予想＞

$Z(2n)/\pi^{2n}$ の値の既約分数の分子に 1 より大きな数が現れる場合、その数は、ゼータの分身（分割級数）を生み出す母等式（生成核）右辺の分子における sin 項ではない定数項の（因数の）奇数の素数を掛けた数になる。

ここで、n は 1 以上の整数。

ここで、Z(s)は次のものであり、ζ(s)と本質的に同じものである。

$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+1/9^s+1/11^s+\cdots$

$$
\begin{aligned}
Z(s)&=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+1/9^s+1/11^s+\cdots\\
&=1+1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s+1/6^s+1/7^s\cdots-(1/2^s+1/4^s+1/6^s+\cdots)\\
&=\zeta(s)-1/2^s\zeta(s)\\
&=(1-1/2^s)\zeta(s)\quad\text{-----①}
\end{aligned}
$$

なお、“Z(s)”は、本シリーズで使っている記法であり、一般的なものとは違っているので注意されたい。

ところで、数学者の加藤和也さんは、ζ(2n)特殊値の分子に現れる数に関して名著「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）で次のように書いている。P.10 より引用。赤字は私が付けました。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

･･･オイラーは、ζ(2)＝$\pi^2/6$ （πは円周率）であることや、

「r が 2 以上の偶数のとき、ζ(r)＝有理数×$\pi^r$」

であることを証明し、その事実のふしぎさに非常に感激しました。ここになぜか円周率が出てくることが第一のふしぎですが、クンマーは、この「有理数」の部分もまたふしぎさを秘めていることを見出したのです。リーマン・ゼータ関数の値の様子を表 1 に書きました。表 1 で、分母の方は出現する素数が限られています(じつは、r が 2 以上の偶数のとき、有理数 $\zeta(r)\pi^{-r}$ の分母の素因数になりうるのは、r+1 以下の素数のみ)が、分子の方に突然 691 という素数がポコッと出現しています。このように分母に比べてゼータの値の分子は大変微妙で、このゼータの分子に素数が突然ポコッと出現する様子には深い意味があるのです。

表 1

$\zeta(2)=\pi^2/6=\pi^2/(2\times 3)$

$\zeta(4)=\pi^4/90=\pi^4/(2\times 3^2\times 5)$

$\zeta(6)=\pi^6/945=\pi^6/(3^3\times 5\times 7)$

$\zeta(8)=\pi^8/(2\times 3^3\times 5^2\times 7)$

$\zeta(10)=\pi^{10}/(3^5\times 5\times 7\times 11)$

$\zeta(12)=691\pi^{12}/(3^6\times 5^3\times 7^2\times 11\times 13)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

注記：数式で本の通り表現しにくいところは、（ ）などを使い補足した。

このように述べたあと、ζ(12)特殊値に 691 という素数が出ることは、クンマーの定理（や岩澤理論）などからイデアル類群の世界の出来事に関係することが述べられている。

今回見出した事実（上記の予想、下記のもの）は、そのような難しいことではなく、もっと簡単な基本的なものである。

なお、これまでζ(s)を論じる際に、私は、Z(s)の形で主に扱ってきた。今回見出した事実も、Z(s)に関してである。ζ(s)の性質は、Z(s)の方がわかりやすい面がある。Z(s)からζ(s)への変換は上記の①式を使えばすぐにできる。予想を再掲する。

## ＜Z(2n)特殊値の分子に現れる数に関する予想＞

$Z(2n)/\pi^{2n}$ の値の既約分数の分子に 1 より大きな数が現れる場合、その数は、ゼータの分身(分割級数)を生み出す母等式(生成核)右辺の分子における sin 項ではない定数項の(因数の)奇数の素数を掛けた数になる。

ここで、n は 1 以上の整数。

以下に、この予想で述べる事実を具体的に示す。予想の文面ではわかりにくだろうが、具体的に見てもらうと一目瞭然となる。

証明はできていないので、正確には予想であるが、それはきわめて興味ある事実である。

以下に、見出した事実を列挙する。分子が１となる$Z(2)$、$Z(4)$、$Z(6)$も一応並べておく。

## ＜発見した事実＞

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■$Z(2)=\pi^2/8=\pi^2/2^3$　　$\pi^2$を無視して分子は１となっている。

■$Z(4)=\pi^4/96=\pi^4/(2^5\times 3)$　　　$\pi^4$を無視して分子は１となっている。

■$Z(6)=\pi^6/960=\pi^6/(2^6\times 3\times 5)$　　$\pi^6$を無視して分子は１となっている。

■$Z(8)=17\pi^8/161280=17\pi^8/(2^9\times 3^2\times 5\times 7)$の分子に17が現れている。（その１７）参照。

$1/(1^2-x^2)^8+1/(3^2-x^2)^8+1/(5^2-x^2)^8+\cdots$

$=(\pi/(4x))^8\ \{17+180(\sin(\pi x/2))^2+114(\sin(\pi x/2))^4+4(\sin(\pi x/2))^6\}\ /\{315(\cos(\pi x/2))^8\}$

$+\ \mathrm{Others}(x)$

上記の$Z(8)$母等式右辺の分子の sin 項でない定数項に17が現れている。

■$Z(10)=31\pi^{10}/2903040=31\pi^{10}/(2^{10}\times 3^4\times 5\times 7)$の分子に31が現れている。(その20)参照。

$1/(1^2-x^2)^{10}+1/(3^2-x^2)^{10}+1/(5^2-x^2)^{10}+\cdots$

$=(\pi/(4x))^{10}\ \{62+1072(sX)^2+1452(sX)^4+247(sX)^6+2(sX)^8\}/\{2835(cX)^{10}\}\ +\ \mathrm{Others}(x)$

上で、$X=\pi x/2$、s は sin, c は cos のこと。したがって”sX”、”cX”は、それぞれ$\sin(\pi x/2)$、$\cos(\pi x/2)$のことである。

上記の$Z(10)$の母等式右辺の分子の sin 項でない定数項は$62=2\times 31$であり、31が現れている。

■$Z(12)=691\pi^{12}/638668800=691\pi^{12}/(2^{12}\times 3^4\times 5^2\times 7\times 11)$の分子に691が現れている。(その20)。

$1/(1^2-x^2)^{12}+1/(3^2-x^2)^{12}+1/(5^2-x^2)^{12}+\cdots$

$=(\pi/(4x))^{12}\ \{1382+35396(sX)^2+83021(sX)^4+34096(sX)^6+2026(sX)^8+4(sX)^{10}\}/\{155925(cX)^{12}\}+\mathrm{Others}(x)$

上で”sX”、”cX”は、それぞれ$\sin(\pi x/2)$、$\cos(\pi x/2)$のことである。
上記の$Z(12)$母等式右辺の分子の sin 項でない定数項は$1382=2\times 691$であり、691が現れている。

■$Z(14)=43\times 127\pi^{14}/(2^{13}\times 3^5\times 5^2\times 7\times 11\times 13)$の分子に$43\times 127$が現れている。
(その26)の2分割でも確認できる。

$1/(1^2-x^2)^{14}+1/(3^2-x^2)^{14}+1/(5^2-x^2)^{14}+\cdots=$

$(\pi/(4x))^{14}\{21844+776661(sX)^2+2801040(sX)^4+2123860(sX)^6+349500(sX)^8+8166(sX)^{10}+4(sX)^{12}\}/\{6081075(cX)^{14}\}$

上で”sX”、”cX”は、それぞれ $\sin(\pi x/2)$、$\cos(\pi x/2)$ のことである。

上記のZ(14)母等式自体は初めて出したものである(以前の(その26)の2分割で導出はしていた)。その右辺分子のsin項でない定数項は $21844=2^2\times43\times127$ であり、43×127が現れている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

以上のようになっている。予想の通りになっていることを確認されたい。

## ＜Z(2n)特殊値の分子に現れる数に関する予想＞

Z(2n)/$\pi^{2n}$ の値の既約分数の分子に1より大きな数が現れる場合、その数は、ゼータの分身(分割級数)を生み出す母等式(生成核)右辺の分子におけるsin項ではない定数項の(因数の)奇数の素数を掛けた数になる。

ここで、nは1以上の整数。

上では母等式を見たが、(その１７)、(その20)や(その26)を見ても分かる通り、分身を見ても、その値の分子において予想は成り立っている。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

**************************************************************

●じつはZ(16)でも予想は合っているとわかったが、それは後日示したい。

どうして母等式の分子の定数項が、Z(2n)の分子に一致するのか、現時点でその理由はわからない。

母等式からゼータそのもの(1分割つまり1分身)を出すには母等式のxに1/2を代入すればよい。その際にsin項が消えたりすればわかりやすいのだが、消えないのである。どこをどういうふうに回りまわって予想のようになるのか？ちょっと想像がつかない。

ゼータ分身を生み出す母等式(部分分数展開式 or ゼータの香りの漂う公式)はふしぎなものとしか言いようがない。

●この母等式は、2018年に見出した「奇数出現位置予想」やまた「分子の和が分母に一致する予想」などもあって、とにかく神秘的である。

奇数出現位置予想(その25)(その26)

分子和が分母に一致する予想(その18)、(その19)、(その20)

●ζ(2n)でこのよう規則があるなら、

$L(1)=\pi/4$、$L(3)=\pi^3/32$、$L(5)=5\pi^5/1536$、$L(7)=61\pi^7/184320$、$L(9)=277\pi^9/8257536$、・・・

でもあるにちがいないと思うのが人情？である。

ところが、いくらそれらの母等式を眺めても規則性は分からない。これらの母等式では、sin項があるのみで定数項がないためであろうか。61とか277は何なのか。これも興味ある問題である。

●「オイラー　無限解析の源流」(高橋浩樹著、現代数学社) によると、ζ(2n)の特殊値の分子の数の謎を解明する手段として、岩澤理論や類体論に関連する保型形式における（ベルヌーイ数に関した）ある無限級数を示している。(p.169)　　例えば、ζ(12)に突如現れる“691“については、次の無限級数が対応するという。

$$G_{12}(q)=691/65520 + q +2049q^2 +177148q^3 +\cdots$$

この $G_{12}(q)$の 12 がζ(12)に対応し、右辺の 691 がζ(12)の 691 に対応するということらしい。あまりにも難しく、よく分からないが、なにもそんなに深い海底まで潜っていかなくても、今回示したようなもっとやさしい事実でもって、ζ(2n)の分子に出る素数の神秘は分かってくるのかもしれない。

**************************************************************

2021.1.4　杉岡幹生

＜参考文献＞

●「解決！フェルマーの最終定理」(加藤和也著、日本評論社)

●「オイラー　無限解析の源流」(高橋浩樹著、現代数学社)

●「数学のたのしみ No15」(日本評論社)