ガウスの cos(2π/17)の√表現とL(1)１７分身、L(1)微分方程式の行列表現の一例（最後）

（その１７１）他で、ゼータのL(1)の分身の値が作図可能数（有理数と√ばかりで構成された数）となるための必要十分条件は、２００年前のガウスらの“正[素数]角形が定規とコンパスで作図可能であるための必要十分条件（下記）”と同じであることを指摘した。

「 フェルマー数 Fn が素数ならば、正 Fn 角形を定規とコンパスで作図することができる。逆に、p を素数として正 p 角形が定規とコンパスで作図できるためには、p がフェルマー数でなければならない。」

そこで見たように、L(1)１７分身の値は、ガウスの結果を借りれば作図可能数となるはずである。

私は１カ月ほど前それを示したくなり、L(1)の１７分身の値を（三角関数の形で）出し、それを“有理数と√ばかりで構成された数”にしようと計算したが、むずかしく途中で止まってしまった。
ノートには「cos(2π/17)が作図可能数であることを示す」と記し計算しているのだが、その時は求められなかった。

ただ、ガウスの結果から理論的に出ることはわかるので、「いつか cos(2π/17)が有理数と√ばかりで構成された姿を見てみたい！」と課題として放っておいた。

cos(2π/17)の“17”は、正十七角形に関係し、さらにL(1)の１７分身に関係している。

さてところで、以前に購入して読めていなかった「ガロア理論講義」（足立恒雄著、日本評論社）を昨日ふっと開けると、p.137 に、なんと cos(2π/17)が√ばかりで表現されたものがズバリ出ているではないか！！
しかも、正十七角形作図でガウスが求めた結果として出ている。

本にはガウスの 5 次方程式の可解性への見解なども掲載されていて、歴史的にも極めて興味深い。ちょっと長いが引用する。注意：Word で書いているため表現に制約があり、数式などは（）も加えて示した。

「ガロア理論講義」から引用。p.136～p.139
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
・・・
以上の計算によって

$$\cos(2\pi/17) = 1/2\,\xi_0$$
$$= -1/16 + (1/16)\sqrt{17} + (1/16)\sqrt{(34-2\sqrt{17})}$$
$$+ (1/8)\sqrt{\{17+3\sqrt{17} - \sqrt{(34-2\sqrt{17})} - 2\sqrt{(34+2\sqrt{17})}\}}$$

となり、cos(2π/17)が累平方根の式で表現できたことになる。おもしろいことに（たいしておもしろくないが)、ガウスの原著では誤植のために 1/8 の符号が-になっていて、ゲルリング宛の手紙でそのことが言及され

ているのだが、全集では訂正されているため見ることができない（フランス語訳は早い時期の翻訳だからか、そのままになっている）。

（略）

ガウスはガロア理論を知っていたわけではないが、実質的にそれに当たる円分方程式の理論を展開した。$\phi(n)$が2の冪にならない場合、たとえば5で割れる場合、「それを決して低次の方程式に還元できないことが完全に厳密に証明できる」と述べているが、その証明は公刊されなかった。これが公刊されていれば、体論の先駆的業績として後生高く評価されたことは間違いない。

ガウスはさらに素数pに対して円周等分方程式$\Phi_p(X)$が可解であることを証明した。すなわち、円分方程式$\Phi_p(X)=0$の根は作図可能でないにしても、冪根の記号でもって表現できるのである。

定理（ガウス）　1の冪根、すなわち円周等分方程式の根は冪根でもって表すことができる。

証明には少し準備が必要であり、冪根の意味も説明せねばならない。また5次以上の代数方程式の理論で必要な命題でもあるので次章で与えることにしよう（定理6.4）。

ガウスは『算術考究』の第359項に次のように書いている（高瀬訳[Gau],p.456;読みやすくするために現代語訳に置き換えた）:

> ４次を超える方程式の一般的解法、言い換えると、一般的な方程式の２項方程式への還元を見いだそうとする卓越した数学者たちの努力はこれまでのところ不首尾に終わってきた。この問題は、今日の数学の力を超えているというよりは、むしろある不可能な事柄を提示しているのである。それにもかかわらず、このような２項方程式への還元を許容する方程式が無数に存在するのも確かである。もしわれわれの円周等分方程式がそのような方程式の仲間に数えることが示されたなら、数学者諸氏のお気に召すであろうことを希望する。

ガウスは、少し読み取りにくいかもしれないが、ここで「5次以上の方程式には２項方程式への還元（開冪による解法）が不可能なものがある」ということをいおうとしている。実は、ガウスは複素数体の代数的閉性を示した学位論文の第9項においても、２項方程式への還元がいつでも可能ならば、方程式は複素数解を持つとしてよいが、そうとは限らないからオイラー達先行者の研究にはまだ欠陥があるという趣旨の運びの中で「5次方程式の冪根による解法が不可能であることを完全な厳密さでもって証明するのはさほど難しいことではないであろう」と述べているのである（第9項の翻訳は高瀬正仁氏の協力による）。

ガウスが「如何程美しい天文学上の発見でも高等整数論が与える喜びに比べれば言うに足らないのである」（『近世数学史談』の訳を拝借）と友人ゲルリングに宛てて書いたのは1819年、41歳の時であったから、円周等分方程式論を一つの頂点とする整数論に対する愛着は決して若さだけに由来するものではなかったことがわかるだろう。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
以上。

$\cos(2\pi/17)$は、このような姿をしていると分かった。その導出は上の結果の前に行われているが、それは体論を駆使した高度な方法である。

私は三角関数の公式だけで出そうとしていたのだが。。（その方法でもできる気がする）

L(1)の１７分身は、tan(33π/68)、-tan(31π/68)、・・、-tan(3π/68)、tan(π/68)の１７個のものだが、cos(2π/17)が√で表現できれば、あとは上の１７個を√で表現することは割合簡単である。

上記を読んでガウス(1777～1855)はどこまで凄いかを改めて思った。
ガウスは、5次以上の方程式の可解性（冪根による一般的解法は可能か）に関して、ほぼ不可能と認識していたことが書かれているからである。

恐るべしガウスというしかない。

5次方程式の解法に関しては、アーベル(1802-1829)やガロア(1811-1832)やルフィーニ(1765-1822)などの名前ばかりがあがるが、ガウスも独立に気づいていたにちがいない。学位論文はガウスがまだ若いころのものであるはずだから。ただし、先行するルフィーニなどの結果もあり、だれが真に最初になしたかはなかなか特定しづらいのかもしれない。
なお、引用文中の“２項方程式”は、2次方程式のことと思われる。

最後に、整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****
●引用中、ガウスは「・・卓越した数学者たちの努力はこれまでのところ不首尾に終わってきた。」と述べている。それはオイラー(1707-1783)やラグランジュ(1736-1813)のことを指したものかもしれない。

オイラーもがんばったようである。

「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著）p.233には、次のように書かれている。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
3次方程式、4次方程式の解を得るための公式は複雑で手の込んだものだ。1600年から1800年の間、数学界では、５次、６次、７次方程式の解の公式はなおいっそう複雑であろうと考えられていて、数学者たちはその公式を見つけようとせっせと研究を続けた。レオンハルト・オイラーは「５次の方程式、そして、もっと高次の方程式を解くために取った苦労は・・・・報われなかった」と告白した。
（略）
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

オイラーのことだから、もの凄い計算を何年にもわたってやったことであろう。しかし、結局その苦労は報われなかった。
オイラーの時代は、みんな「３次、４次で公式があるなら、５次でもあるにちがいない」と信じていたはずである。
「もしかして５次は公式ないのでは？」との空気がただよいはじめたのは、ラグランジュの時代あたりなのか。よくわからないとしか言いようがない。

●数学者・足立恒雄氏は歴史を深く研究されているといつも思う。原著を丁寧に読み込んでおられるがゆえに、上のような新たな視点ともよぶべき、面白い話が書けるのであろう。

権威本の丸写しのような教科書も多いので、注意したい。

●今回の内容とは関係がないが、L(1)分割微分方程式を行列で表現したらどうなるか？が気になり、それを行った。面白い結果が出た。

結論を先に述べると、L(1)分割微分方程式の作用素の行列は、三角数から構成されると分かった！

ここでは、n＝5（５分身）の一例だけ紹介しよう。

（置き換えの方法は、「物理とか（演算子の行列表現とその例）」サイトを参考にさせてもらった）

L (1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad \text{------[1]}$$

(n=・・-3, -2, -1,　0,　1,　2,　3・・)

n＝5 の場合の一般解　$y = c_1(x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1) + c_2(x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1)$ ---①

ここで、c_1 と c_2 は任意の定数である。

n＝5 の場合、[1]は次のようになる。

$$(x^2+1)y'' - 8xy' + 20y = 0 \quad \text{------[1] -2}$$

一般解の c1 側の基本解 $f(x) = x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1$ に対し、基底を x^5 , x^4 , x^3 , x^2 , x , 1 とし、

x^5 を $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ に、x^4 を $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ に、x^3 を $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ に、x^2 を $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ に、x を $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ に、1 を $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ に対応させる。

すると、上記の微分方程式[1]-2 は、行列とベクトルで表現でき、次のようになる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\10&0&1&0&0&0\\0&6&0&3&0&0\\0&0&3&0&6&0\\0&0&0&1&0&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-5\\-10\\10\\5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{------[1] -3}$$

ここで、左辺の行列が作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2} - 8x\frac{d}{dx} + 20$”に対応している。

また左辺のベクトルが $f(x) = x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1$ に対応している。

この行列で対称的に斜めに二列で走る１　３　６　10 の数列は、どんな意味があるだろうか？　じつは、これは多角数の一種の三角数となっている！

三角数は　　１　３　６　10　15　21　28　36　45　55　・・・
という数で、これはだんだんと大きな三角形の形に石を積み上げていくときの個数である。n(n+1)/2 が三角数を生み出す公式である。

現時点までｎ＝1（１分身）からｎ＝7（７分身）までのＬ(1)分割微分方程式を行列・ベクトルで表現できているのだが、その作用素の行列にはどこまでも三角数が並んでいく。

つまり、Ｌ(1)分割微分方程式の作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-8x\frac{d}{dx}+20$”の行列は、三角数から構成されていると言える。そして、作用素がy にかぶさって（作用して）０になる。

ちなみに、一般解①の c_2 側の基本解 g(x)＝(x^5 +$5x^4$ −$10x^3$ −$10x^2$ +5x +1)のベクトルをとっても、上記と同じ作用素行列に対し、[1]-3 と同類の形が成り立つ。考えられたし。

この行列形式への置き換えは、約１世紀前に量子論のハイゼンベルグ行列形式が、シュレーディンガー方程式に置き換えられたことの逆方向のことに対応していると言える。

● 行列形式には、微分方程式を眺めているのとは、また違った風景が見えて愉しいものがある。
[1]の微分方程式にまさか三角数がひそんでいるとは思いもよらなかった。やはり、あるものを別の形式（言葉）で書き換えるというのは重要なことである。

なお、三角数に関しては全ての数が３個の三角数の和として表されることが、1796 年にガウスによって示されている。
ヘウレーカ　num＝△+△+△
とガウスは表している。
例えば、10＝1+3+6 だし、33＝15+15+3 だし、また 18＝6+6+6 である。

ヘウレーカ（わかった！）とはアルキメデスをまねたものと思われ、ガウスの喜びが伝わってくる。

1796 年といえばガウス 19 歳の頃だろうか。ガウスは十代でいろいろと歴史に残る結果を出している。
****

2020.9.27　杉岡幹生

＜参考文献＞

●「ガロア理論講義」（足立恒雄著、日本評論社）

●「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカヴァー・トゥエンティワン）

●　サイト「物理とか（演算子の行列表現とその例）」