＜ L(1)分割微分方程式の解の鏡映と回転（その２） ＞

前回（その１７４）で、L(1)分割微分方程式の一般解での二つの基本解は、互いに鏡映や180°回転の関係になっていることを述べた。偶数分割が鏡映、奇数分割が180° 回転となる。

前回はやや粗い形の報告となったので、今回は奇数分割の場合のグラフも加え、前回のものを補足・修正する形で示したい。

まずL(1)分割微分方程式と一般解を掲げ、その次に鏡映と回転の事実を示していく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L (1)分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \qquad \text{-----}[1]$$

(n=・・−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3・・)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\} = n(1-n)y \qquad \text{------}[2]$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

L(1)分割微分方程式[1]、[2]の一般解（n が任意の整数値での解）

・

・

n=−7 の場合

$y=\{c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)+c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)\}/(x^2+1)^7$

n=−6 の場合

$y=\{c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)\}/(x^2+1)^6$

n=−5 の場合　$y=\{c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)\}/(x^2+1)^5$

n=−4 の場合　$y=\{c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)\}/(x^2+1)^4$

n=−3 の場合　$y=\{c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)\}/(x^2+1)^3$

n=−2 の場合　$y=\{c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)\}/(x^2+1)^2$

n=−1 の場合　$y=\{c_1(x-1)+c_2(x+1)\}/(x^2+1)$

n=0 の場合　$y=c_1\tan^{-1}(x)+c_2$

n=1 の場合　$y=c_1(x-1)+c_2(x+1)$

n=2 の場合　$y=c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)$

n=3 の場合　$y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$

n=4 の場合　$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$

n=5 の場合　$y=c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)$

n=6 の場合　$y=c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)$

n=7 の場合　$y=c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)$

$\qquad +c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)$

・
・
ここで、c_1とc_2は任意の定数である。

＝＝

上記の二つの基本解は、興味深い性質をもっている。

一般解のc_1側の基本解と、c_2側の基本解の多項式関数をグラフで見ると、それらは互いに鏡映の関係または180°回転の関係になっているのである！

多項式関数の最高次数が偶数の場合は前者、奇数の場合は後者となる。整理すると、次のようになる。

二つの基本解の多項式関数で、最高次が偶数のもののグラフはy軸に対し互いに鏡映の関係となる。
二つの基本解の多項式関数で、最高次が奇数のもののグラフは座標原点を中心に互いに180°回転の関係となる。（180°回転だから、反時計回りでも時計回りでもどちらでもOK）

具体的に述べると、例えば、n＝4（偶数）の場合の一般解
$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$
に関し、c_1の$y=x^4-4x^3-6x^2+4x+1$と、c_2の$y=x^4+4x^3-6x^2-4x+1$は、y軸に対して鏡映の関係になっている。

また例えば、n＝3（奇数）の場合の一般解
$y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$
に関し、c_1の$y=x^3-3x^2-3x+1$とc_2の$y=x^3+3x^2-3x-1$のグラフは、座標原点を中心に180°の回転の関係になっている。

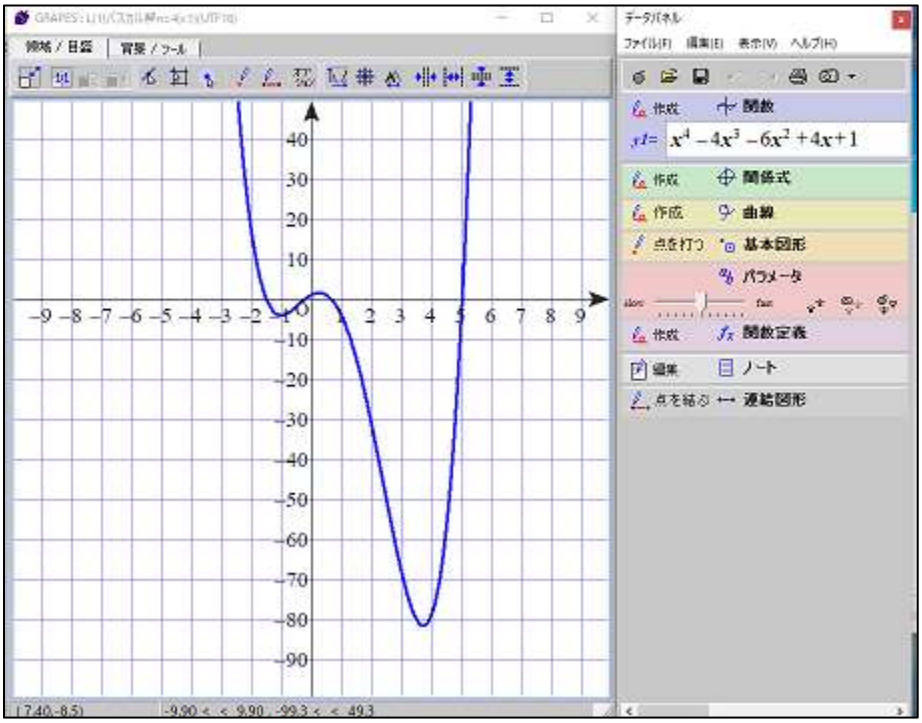
基本解が鏡映や回転の関係になっているというのは面白いことである。

以下、偶数分割の場合と奇数分割の場合に分けてグラフで具体的に見てみよう。

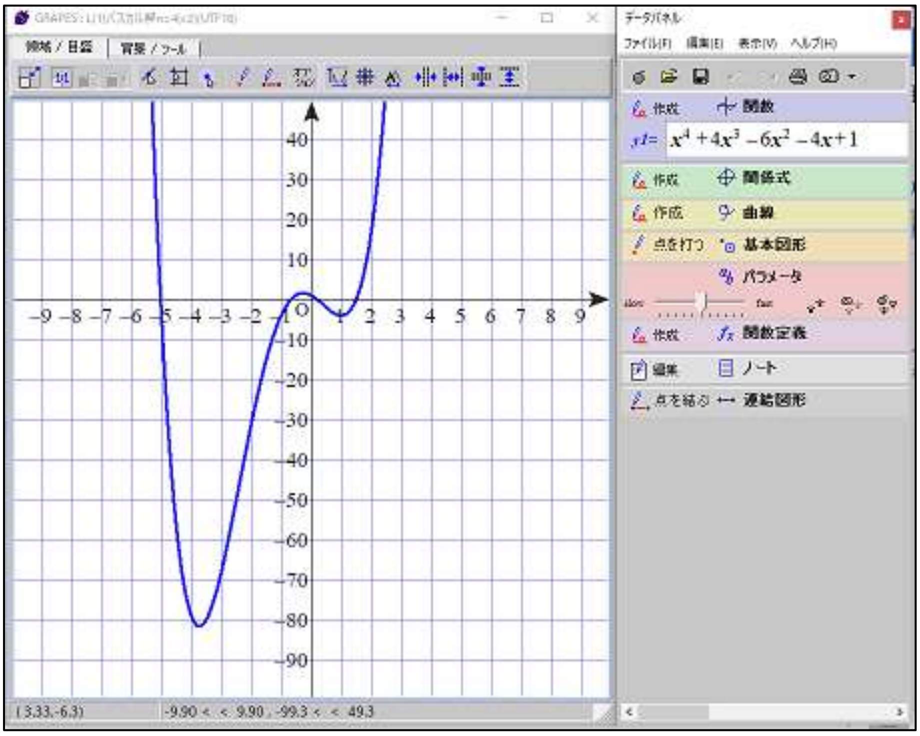
［偶数分割の場合］
偶数の上で指摘した鏡映の関係をグラフで見てみよう。GRAPESというフリーソフトで描いた。

n＝4の一般解$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$
に関し、c_1の$y=x^4-4x^3-6x^2+4x+1$と、c_2の$y=x^4+4x^3-6x^2-4x+1$は、y軸に対して鏡映の関係になっている。
以下の通り。

c_1 の $y=x^4-4x^3-6x^2+4x+1$ のグラフ



c_2 の $y=x^4+4x^3-6x^2-4x+1$ のグラフ



このように n=4 の場合は、y 軸に関して対称つまり鏡映の関係になっている。他の偶数の場合もそうなっている。

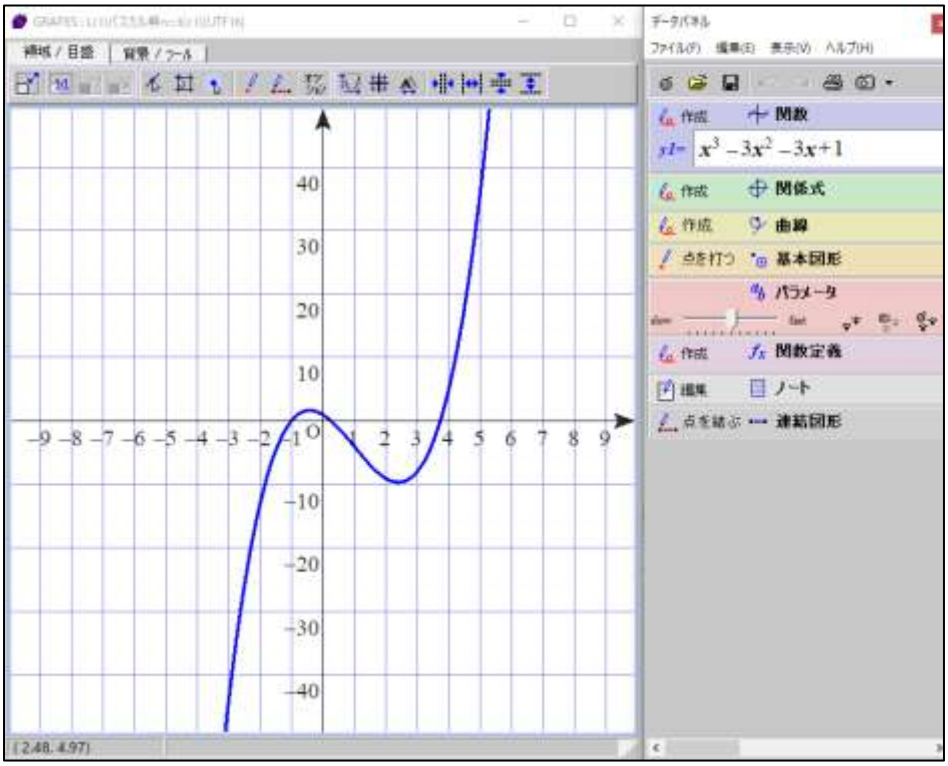
[奇数分割の場合]

奇数の n=3 の上で指摘した回転の関係をグラフで見てみよう。

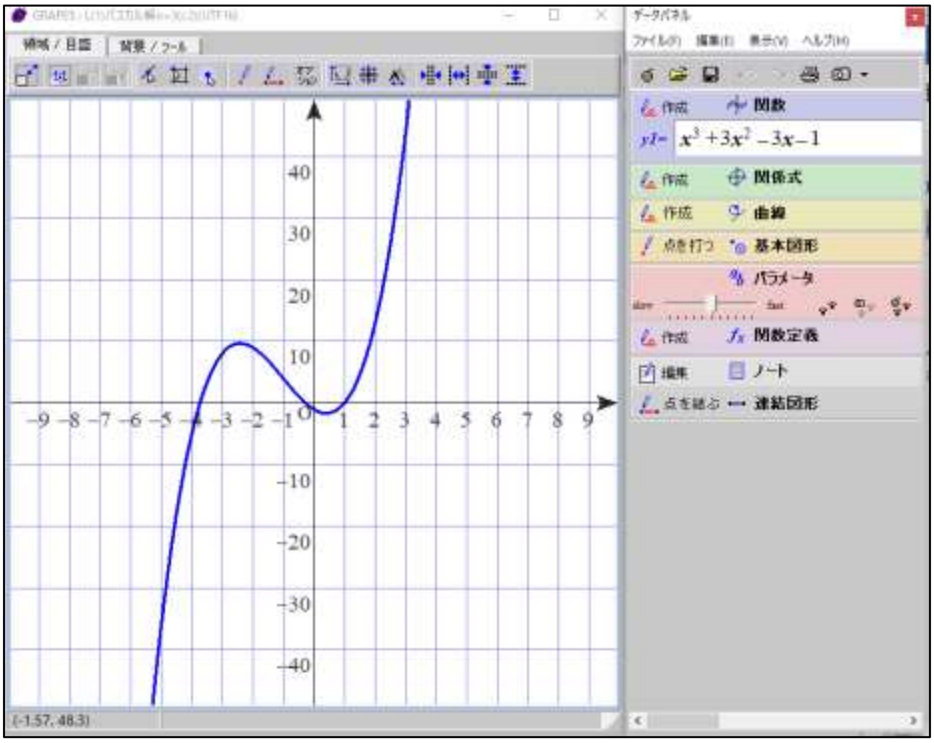
n=3 の一般解 $y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$

に関し、c_1 の $y=x^3-3x^2-3x+1$ と、c_2 の $y=x^3+3x^2-3x-1$ は、原点を中心とした 180° 回転の関係の関係になっている。以下の通り。

c_1 の $y=x^3-3x^2-3x+1$ のグラフ



c_2 の $y=x^3+3x^2-3x-1$ のグラフ



　このように $n=3$ の場合は、座標原点に対して 180° 回転の関係になっている。他の奇数の場合もそうなっている。

さて、鏡映や回転は群と関係がある。それらの関係も見ておこう。

x–y 座標での鏡映を表す行列をMとすると、それは$M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$となる。

単位行列$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$も加えたEとMの集合 $\{E, M\}$ つまり、集合$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$は群を成す。

一方、180° 回転を表す行列をR とすると、どちら回りでもよいが、座標原点を中心に反時計回りに 180° の回転を表す行列として構成すると、それは$R=\begin{pmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$となる。

単位行列$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$も加えたEとRの集合 $\{E, R\}$ つまり、集合$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$は群を成す。

$\{E, M\}$ も $\{E, R\}$ も、どちらも群の公理を満たしていることを確認いただきたい。

基本解の関係をまとめると、以下のようになる。

■L(1)分割微分方程式の基本解から成る二つの関数は、鏡映(y 軸)や 180° 回転(原点を中心とした)の関係になっている。偶数分割が前者に、奇数分割が後者に対応している。

■鏡映(y 軸)の関係は群$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$に関係し、180° 回転（原点中心）の関係は群$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$に関係する。

以上。

このようにL(1)分割微分方程式の二つの基本解は、シンプルできれいな関係になっている。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

●L(1)分割微分方程式の基本解は、上記のような関係になっている。

では、逆方向からの問いで、二つの基本解が鏡映や回転の関係になる２階同次常微分方程式はどんなタイプの微分方程式なのだろうか？

● **L(1)分割の微分方程式**

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \qquad \text{-----}[1]$$

(n=・・-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3・・)

この[1]は、x＝(2t-1)/i と変数変換すれば（i は虚数単位)、超幾何微分方程式（ガウスの微分方程式）になることは前回他で説明した。

さらに[1]で、x＝iz と変数変換すれば（i は虚数単位)、次の超球微分方程式というタイプの微分方程式に変換できる。p.121「数学公式Ⅲ」（岩波書店）⇒　μ＝-n、ν＝0

$(1-z^2)w'' -2(\mu+1)zw' +(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)w=0$

ただし[1]の形そのもの、あるいはその類似形では公式集に出ていないようである。

****

2020.9.21　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅲ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）