＜ Ｌ(3) １８分割 ＞

Ｌ(3)の１８分割を示す。

Ｌ(3)は、Ｌ(s)ゼータのｓに３を代入したもので、次のものである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 +1/13^3 -1/15^3 +\cdots=\pi^3/32$ -----①

１８分割を示すと、以下の通りである。

＝＝＝

■Ｌ(3) １８分割

$A1 = 1 - 1/71^3 +1/73^3 -1/143^3 +1/145^3 -1/215^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(35\pi/72)/\cos^3(35\pi/72)$
$A2 = 1/3^3 -1/69^3 +1/75^3 -1/141^3 +1/147^3 -1/213^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(33\pi/72)/\cos^3(33\pi/72)$
$A3 = 1/5^3 -1/67^3 +1/77^3 -1/139^3 +1/149^3 -1/211^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(31\pi/72)/\cos^3(31\pi/72)$
$A4 = 1/7^3 -1/65^3 +1/79^3 -1/137^3 +1/151^3 -1/209^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(29\pi/72)/\cos^3(29\pi/72)$
$A5 = 1/9^3 -1/63^3 +1/81^3 -1/135^3 +1/153^3 -1/207^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(27\pi/72)/\cos^3(27\pi/72)$
$A6 =1/11^3 -1/61^3 +1/83^3 -1/133^3 +1/155^3 -1/205^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(25\pi/72)/\cos^3(25\pi/72)$
$A7 =1/13^3 -1/59^3 +1/85^3 -1/131^3 +1/157^3 -1/203^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(23\pi/72)/\cos^3(23\pi/72)$
$A8 =1/15^3 -1/57^3 +1/87^3 -1/129^3 +1/159^3 -1/201^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(21\pi/72)/\cos^3(21\pi/72)$
$A9 =1/17^3 -1/55^3 +1/89^3 -1/127^3 +1/161^3 -1/199^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(19\pi/72)/\cos^3(19\pi/72)$
$A10=1/19^3 -1/53^3 +1/91^3 -1/125^3 +1/163^3 -1/197^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(17\pi/72)/\cos^3(17\pi/72)$
$A11=1/21^3 -1/51^3 +1/93^3 -1/123^3 +1/165^3 -1/195^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(15\pi/72)/\cos^3(15\pi/72)$
$A12=1/23^3 -1/49^3 +1/95^3 -1/121^3 +1/167^3 -1/193^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(13\pi/72)/\cos^3(13\pi/72)$
$A13=1/25^3 -1/47^3 +1/97^3 -1/119^3 +1/169^3 -1/191^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(11\pi/72)/\cos^3(11\pi/72)$
$A14=1/27^3 -1/45^3 +1/99^3 -1/117^3 +1/171^3 -1/189^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(9\pi/72)/\cos^3(9\pi/72)$
$A15=1/29^3 -1/43^3 +1/101^3 -1/115^3 +1/173^3 -1/187^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(7\pi/72)/\cos^3(7\pi/72)$
$A16=1/31^3 -1/41^3 +1/103^3 -1/113^3 +1/175^3 -1/185^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(5\pi/72)/\cos^3(5\pi/72)$
$A17=1/33^3 -1/39^3 +1/105^3 -1/111^3 +1/177^3 -1/183^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(3\pi/72)/\cos^3(3\pi/72)$
$A18=1/35^3 -1/37^3 +1/107^3 -1/109^3 +1/179^3 -1/181^3 + \cdots = (\pi/72)^3\sin(\pi/72)/\cos^3(\pi/72)$

$A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6 +A7 -A8 +A9 -A10 +A11 -A12 +A13 -A14 +A15 -A16 +A17 -A18=L(3)=\pi^3/32$ である。

A1,-A2,A3,-A4,A5,-A6,A7,-A8,A9,-A10,A11,-A12,A13,-A14,A15,-A16,A17,-A18 がＬ(3)の１８分身である。

念のため、上の全式に対しExcelマクロで数値検証したが、左辺級数と右辺値は一致した。

＝＝＝

導出方法は以下の通りである。

＝＝＝

[分身の導出方法]

上の分割級数(分身)の導出方法の概要を示す。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式②を使う。

$1/(1^2-x^2)^3+1/(3^2-x^2)^3+1/(5^2-x^2)^3+\cdots=(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)+\mathrm{Others}(x)$ ----②

右辺の Others(x) は L(3) に関係しない関数なので（じつは $\zeta(2)$ と L(1) に関係)、”Others(x)”とした。
ここで Others(x) は次のものである。

$\mathrm{Others}(x)=-(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2)+(3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$

はじめの π^2 の項が $\zeta(2)$ に関係し、二つ目の π の項が L(1) に関係している。

さて、次のように上記②の x に特定の値を代入することで L(3) の分身が次々に求まっていく。

②の x に {36-(2n-1)}/36 を代入すると、An が得られる。ここで n は 1 から 18 の整数。
例えば n=3 として②の x に 31/36 を代入すると、A3 が得られる。

（注記）②の左辺級数から L(1) と $\zeta(2)$ の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺の L(1) と $\zeta(2)$ の分割級数に対応した値が Others(x) から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x) に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単に L(3) の分割級数（分身）を求めることができる。L(5), L(7)・・でも類似的に同様にできる。

＝＝＝

このように１８分身が求まった。

冗長に見えるこのような作業を行っているのは、L(3) においても、L(1) で見た「分身が次の段階の分身を生み出す」という同類の構造を示したいからである。
例えば、L(1)での(その89)他で見た「一つの分身が二つの分身に割れる」という構造である。

また、今回の L(3)18分身の中に L(3)6分身が隠れていることを指摘しておきたい。A2, A5, A8, A11, A14, A17 は L(3)6分身そのものになっている。例えば、今回の上記 A2 が、(その128)の6分身の B1 に一致することは容易に確認できる。
さらには、L(3)2分身も隠れているのだが、探していただきたい。ヒント⇒(その125)。

2020. 8. 5　杉岡幹生