

< L(1) 1 2 分身を $\sqrt{}$ で表す >

前回 (167) では、 $L(3)$ の 6 分身を数値で ($\sqrt{\quad}$ で) 表すことができた。「1 個の分身が二つに割れる」という性質を使い、それを 2 次方程式を解くことに帰着して求めたのであった。

その方法を使って $L(3)$ 6 分身 $\Rightarrow$ 1 2 分身で、 $L(3)$ 1 2 分身を求めてもよいが、 $L(3)$ は大きな数が出てきて、見た目がよくない。

そこで今回は、 $L(1)$ の12分身の数値表現を、 $L(1)$ 6分身の数値表現を用いて求めることにしたい。

$$L(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots = \pi/4 \quad \text{-----(1)}$$

まず復習から。ゼータの分岐構造とはどんなものを下記に示す。今回見る部分は赤字にした。

< L(1)分岐構造 >

$L(1) \Rightarrow 2 \text{ 分身} \Rightarrow 4 \text{ 分身} \Rightarrow 8 \text{ 分身} \Rightarrow 16 \text{ 分身} \Rightarrow 32 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

$L(1) \Rightarrow 3 \text{ 分身} \Rightarrow 6 \text{ 分身} \Rightarrow 12 \text{ 分身} \Rightarrow 24 \text{ 分身} \Rightarrow 48 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

$L(1) \Rightarrow 5 \text{ 分身} \Rightarrow 10 \text{ 分身} \Rightarrow 20 \text{ 分身} \Rightarrow 40 \text{ 分身} \Rightarrow 80 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

$L(1) \Rightarrow 7 \text{ 分身} \Rightarrow 14 \text{ 分身} \Rightarrow 28 \text{ 分身} \Rightarrow 56 \text{ 分身} \Rightarrow 112 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

このように一個の分身が倍の2個の分身に割れる（分岐する）。素数を起点として倍々ゲームで無限に分岐していく。

逆に無限の彼方から見れば、(先頭行を例に)・・・⇒3 2 分身⇒1 6 分身⇒8 分身⇒4 分身⇒2 分身⇒L(1) などとなっている。

厳密には予想であるが、こんなふうになっている。

(注記)

$L(1) \Rightarrow 4 \text{ 分身} \Rightarrow 8 \text{ 分身} \Rightarrow 16 \text{ 分身} \Rightarrow 32 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

$L(1) \Rightarrow 6 \text{ 分身} \Rightarrow 12 \text{ 分身} \Rightarrow 24 \text{ 分身} \Rightarrow 48 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

なども当然成り立つが、略す。略す理由は、前者は上の全体での 1 行目に含まれており、後者は 2 行目に含まれていて、表示する必要がないからである（冗長となるだけ）。素数のケースだけ書けば十分である。

[illegible]

これがゼータの分岐構造である。

この構造は1個の分身が二つの分身に割れ、その分身がまた二つに割れ・・・と次々に枝分かれしていく無限フラクタル構造である。その構造の最終到達地点（ピラミッドの頂点）に位置するのが冒頭の(1)式である。

では以下で、 $L(1)$ の12分身を数値で求めたい。

まず $L(1)$ の6分割と12分割を示す。6分割は(102)から、12分割は(その91)から引いた。

=====

■ $L(1)$ 6分割

$$A1 = 1 - 1/23 + 1/25 - 1/47 + 1/49 - 1/71 + \dots = (\pi/24) \tan(11\pi/24)$$

$$A2 = 1/3 - 1/21 + 1/27 - 1/45 + 1/51 - 1/69 + \dots = (\pi/24) \tan(9\pi/24)$$

$$A3 = 1/5 - 1/19 + 1/29 - 1/43 + 1/53 - 1/67 + \dots = (\pi/24) \tan(7\pi/24)$$

$$A4 = 1/7 - 1/17 + 1/31 - 1/41 + 1/55 - 1/65 + \dots = (\pi/24) \tan(5\pi/24)$$

$$A5 = 1/9 - 1/15 + 1/33 - 1/39 + 1/57 - 1/63 + \dots = (\pi/24) \tan(3\pi/24)$$

$$A6 = 1/11 - 1/13 + 1/35 - 1/37 + 1/59 - 1/61 + \dots = (\pi/24) \tan(\pi/24)$$

$A1 - A2 + A3 - A4 + A5 - A6 = L(1)$ である。 $A1, -A2, A3, -A4, A5, -A6$ が $L(1)$ 6分身である。

$\tan$ の値は以下の通り。

$$\tan(11\pi/24) = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\tan(9\pi/24) = 1 + \sqrt{2}$$

$$\tan(7\pi/24) = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\tan(5\pi/24) = -(2 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\tan(3\pi/24) = -1 + \sqrt{2}$$

$$\tan(\pi/24) = -(2 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

■ $L(1)$ 12分割

$$B1 = 1 - 1/47 + 1/49 - 1/95 + 1/97 - 1/143 + \dots = (\pi/48) \tan(23\pi/48)$$

$$B2 = 1/3 - 1/45 + 1/51 - 1/93 + 1/99 - 1/141 + \dots = (\pi/48) \tan(21\pi/48)$$

$$B3 = 1/5 - 1/43 + 1/53 - 1/91 + 1/101 - 1/139 + \dots = (\pi/48) \tan(19\pi/48)$$

$$B4 = 1/7 - 1/41 + 1/55 - 1/89 + 1/103 - 1/137 + \dots = (\pi/48) \tan(17\pi/48)$$

$$B5 = 1/9 - 1/39 + 1/57 - 1/87 + 1/105 - 1/135 + \dots = (\pi/48) \tan(15\pi/48)$$

$$B6 = 1/11 - 1/37 + 1/59 - 1/85 + 1/107 - 1/133 + \dots = (\pi/48) \tan(13\pi/48)$$

$$B7 = 1/13 - 1/35 + 1/61 - 1/83 + 1/109 - 1/131 + \dots = (\pi/48) \tan(11\pi/48)$$

$$B8 = 1/15 - 1/33 + 1/63 - 1/81 + 1/111 - 1/129 + \dots = (\pi/48) \tan(9\pi/48)$$

$$B9 = 1/17 - 1/31 + 1/65 - 1/79 + 1/113 - 1/127 + \dots = (\pi/48) \tan(7\pi/48)$$

$$B10 = 1/19 - 1/29 + 1/67 - 1/77 + 1/115 - 1/125 + \dots = (\pi/48) \tan(5\pi/48)$$

$$B11 = 1/21 - 1/27 + 1/69 - 1/75 + 1/117 - 1/123 + \dots = (\pi/48) \tan(3\pi/48)$$

$$B12 = 1/23 - 1/25 + 1/71 - 1/73 + 1/119 - 1/121 + \dots = (\pi/48) \tan(\pi/48)$$

$B1 - B2 + B3 - B4 + B5 - B6 + B7 - B8 + B9 - B10 + B11 - B12 = L(1)$ となる。

$B1, -B2, B3, -B4, B5, -B6, B7, -B8, B9, -B10, B11, -B12$ が $L(1)$ 12分身である。

=====

上記結果から L(1) 6 分身 (A1, -A2, A3, -A4, A5, -A6) を数値で表現すると、次となる。

$$\begin{aligned} A1 &= (\pi/24) \{2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})}\} \\ -A2 &= (\pi/24) \{-1 - \sqrt{2}\} \\ A3 &= (\pi/24) \{2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})}\} \\ -A4 &= (\pi/24) \{2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{(2-\sqrt{3})}\} \\ A5 &= (\pi/24) \{-1 + \sqrt{2}\} \\ -A6 &= (\pi/24) \{2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{(2+\sqrt{3})}\} \end{aligned}$$

また ([その91](#)) から次の関係が成り立つ。つまり 6 分割の各分身がそれぞれ 2 個に割れている。

$$\begin{aligned} A1 &= B1 - B12 & \text{-----①} \\ -A2 &= -B2 + B11 & \text{-----②} \\ A3 &= B3 - B10 & \text{-----③} \\ -A4 &= -B4 + B9 & \text{-----④} \\ A5 &= B5 - B8 & \text{-----⑤} \\ -A6 &= -B6 + B7 & \text{-----⑥} \end{aligned}$$

①に対して 2 次方程式の解と係数の関係と、そして三角関数の公式 $\sin(A)\sin(B) = \{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$, $\cos(A)\cos(B) = \{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$ を使うと、次の 2 次方程式が得られる。途中きれいな景色が見える。

$$x^2 - 2\{2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}x - 1 = 0$$

この二解が、B1 と -B12 となる。ただし、正確には B1 と -B12 を $\pi/48$ で割った値となる。例えば、B1 なら $(\pi/48)\tan(23\pi/48)$ の $\tan(23\pi/48)$ のことである。

②～⑥に対しても同様に求められる。全部をまとめると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bullet \text{ B1 と -B12 は右の 2 次方程式の解である: } & x^2 - 2\{2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}x - 1 = 0 & \text{-----[1]} \\ \bullet \text{ -B2 と B11 は右の 2 次方程式の解である: } & x^2 + 2(1 + \sqrt{2})x - 1 = 0 & \text{-----[2]} \\ \bullet \text{ B3 と -B10 は右の 2 次方程式の解である: } & x^2 - 2\{2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})}\}x - 1 = 0 & \text{-----[3]} \\ \bullet \text{ -B4 と B9 は右の 2 次方程式の解である: } & x^2 - 2\{2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{(2-\sqrt{3})}\}x - 1 = 0 & \text{-----[4]} \\ \bullet \text{ B5 と -B8 は右の 2 次方程式の解である: } & x^2 + 2(1 - \sqrt{2})x - 1 = 0 & \text{-----[5]} \\ \bullet \text{ -B6 と B7 は右の 2 次方程式の解である: } & x^2 - 2\{2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}x - 1 = 0 & \text{-----[6]} \end{aligned}$$

[1]～[6]を解くことで、L(1) 1 2 分身の値（正確には 1 2 分身を $\pi/48$ で割った値）を得ることができる。

上記を解いて求めた L(1) 1 2 分身の値を示すと、以下となる。

=====

[1]より

$$\begin{aligned} B1 &= (\pi/48) [2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3} + (2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}}] \\ -B12 &= (\pi/48) [2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3} + (2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}}] \end{aligned}$$

[2]より

$$-B2 = (\pi/48) [-1 - \sqrt{2} - \sqrt{(4+2\sqrt{2})}]$$

$$B11 = (\pi/48) [-1 - \sqrt{2} + \sqrt{(4+2\sqrt{2})}]$$

[3]より

$$B3 = (\pi/48) [2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})} + 2\sqrt{\{4-2\sqrt{3} + (2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}\}}]$$

$$-B10 = (\pi/48) [2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})} - 2\sqrt{\{4-2\sqrt{3} + (2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}\}}]$$

[4]より

$$-B4 = (\pi/48) [2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{(2-\sqrt{3})} - 2\sqrt{\{4-2\sqrt{3} - (2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}\}}]$$

$$B9 = (\pi/48) [2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{(2-\sqrt{3})} + 2\sqrt{\{4-2\sqrt{3} - (2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}\}}]$$

[5]より

$$B5 = (\pi/48) [-1 + \sqrt{2} + \sqrt{(4-2\sqrt{2})}]$$

$$-B8 = (\pi/48) [-1 + \sqrt{2} - \sqrt{(4-2\sqrt{2})}]$$

[6]より

$$-B6 = (\pi/48) [2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} - 2\sqrt{\{4+2\sqrt{3} - (2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}}]$$

$$B7 = (\pi/48) [2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} + 2\sqrt{\{4+2\sqrt{3} - (2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}}]$$

=====

このようにしてL(1) 1 2 分身が数値で得られた。

これらのペアを足し合わせていただきたい(①～⑥)。そこには、えもいわれぬ味わいがある。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

●[1]～[6]の2次方程式の定数項はすべて-1になっている。それは「途中きれいな景色が見える」と書いたことに関係する。計算していて「凄い構造だ」と思った。

●ゼータ(明示的な特殊値)の分身を数値で求めるには、ほとんどのケースで2次方程式を解くだけでよいと分かった。

そして24分身も48分身も・・・(労力は要るが)手計算で出せる。そういうことができるのも「1個の分身が2個の分身に割れる(分裂する)」という凄い性質があるからである。

いまは

$L(1) \Rightarrow 3 \text{ 分身} \Rightarrow 6 \text{ 分身} \Rightarrow 12 \text{ 分身} \Rightarrow 24 \text{ 分身} \Rightarrow 48 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

で見ているが、上記のことは、

$L(1) \Rightarrow 2 \text{ 分身} \Rightarrow 4 \text{ 分身} \Rightarrow 8 \text{ 分身} \Rightarrow 16 \text{ 分身} \Rightarrow 32 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

$L(1) \Rightarrow 5 \text{ 分身} \Rightarrow 10 \text{ 分身} \Rightarrow 20 \text{ 分身} \Rightarrow 40 \text{ 分身} \Rightarrow 80 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

でも成り立つ。なぜなら2分身、5分身は既に $\sqrt{}$ で求まっているから。

では、次はどうか？

$L(1) \Rightarrow 7 \text{ 分身} \Rightarrow 14 \text{ 分身} \Rightarrow 28 \text{ 分身} \Rightarrow 56 \text{ 分身} \Rightarrow 112 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

$L(1) \Rightarrow 11 \text{ 分身} \Rightarrow 22 \text{ 分身} \Rightarrow 44 \text{ 分身} \Rightarrow 88 \text{ 分身} \Rightarrow 176 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

$L(1) \Rightarrow 13 \text{ 分身} \Rightarrow 26 \text{ 分身} \Rightarrow 52 \text{ 分身} \Rightarrow 104 \text{ 分身} \Rightarrow 208 \text{ 分身} \Rightarrow \dots$

これは、最初の7分身、11分身、13分身が数値で($\sqrt{}$ で)出せれば、あとはイモずる式に出てくるが、うまくいくか？ たぶんうまくいくのだろうが、研究課題である。

● $L(1)$ 12分身は12次の方程式の解である。それは $L(1)$ の場合、パスカルの三角形から得られる。

$L(1)$ 分割とパスカル三角形との関連は2018年11月に気づいた。[\(その52\)](#)

その12次方程式をパスカルから求めると、次のようになった。

$$x^{12} - 12x^{11} - 66x^{10} + 220x^9 + 495x^8 - 792x^7 - 924x^6 + 792x^5 + 495x^4 - 220x^3 - 66x^2 + 12x + 1 = 0$$

この方程式の解が $L(1)$ 12分身の値(正確には12分身を($\pi/48$)で割った値)となる。

その12次方程式の多項式は、上方での[1]~[6]の2次方程式の多項式で因数分解され、次のようになる。

$$\begin{aligned} & x^{12} - 12x^{11} - 66x^{10} + 220x^9 + 495x^8 - 792x^7 - 924x^6 + 792x^5 + 495x^4 - 220x^3 - 66x^2 + 12x + 1 \\ &= [x^2 - 2\{2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}x - 1] \cdot [x^2 + 2(1+\sqrt{2})x - 1] \cdot [x^2 - 2\{2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})}\}x - 1] \\ & \quad \cdot [x^2 - 2\{2-\sqrt{3}-2\sqrt{(2-\sqrt{3})}\}x - 1] \cdot [x^2 + 2(1-\sqrt{2})x - 1] \cdot [x^2 - 2\{2+\sqrt{3}-2\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}x - 1] \end{aligned}$$

● 上の12次方程式では、基底、ベクトル空間、最小多項式、正規拡大などを考察することが重要となる。

※過去の関連ページ [\(その150\)](#) [\(その151\)](#) [\(その152\)](#) [\(その153\)](#)
