＜ L(3)分岐構造　３分身⇒６分身 その２＞

L(3)分割の分岐構造の続きである。前回の（その１６６）では３分身が６分身に割れる様子を見たが、その際、三角関数の計算で３分身の各分身が二つに割れることを確かめた。

それはそれでＯＫなのだが、L(3)の６分身を全て数値（√の表現）で求め、その表現での成立もじつは確認したかったが、それはできていなかった。今回、それを行ったので示したい。

$$L(3) = 1 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + 1/9^3 - 1/11^3 + 1/13^3 - 1/15^3 + \cdot\cdot\cdot = \pi^3/32 \qquad \text{-----}(1)$$

まず復習から。ゼータの分岐構造とはどんなものかを下記に示す。今回見る部分は赤字にした。

※※

＜ L(3)分岐構造 ＞

L(3)⇒２分身⇒４分身 ⇒ ８分身 ⇒１６分身⇒ ３２分身⇒・・・
L(3)⇒３分身⇒６分身 ⇒１２分身⇒２４分身⇒ ４８分身⇒・・・
L(3)⇒５分身⇒１０分身⇒２０分身⇒４０分身⇒８０分身⇒・・・
L(3)⇒７分身⇒１４分身⇒２８分身⇒５６分身⇒１１２分身⇒・・・
・・・・・・・・・・

このように、一個の分身が倍の２個の分身に割れる（分岐する）。素数を起点として倍々ゲームで無限に分岐していく。

逆に無限の彼方から見れば、（先頭行を例に）・・・⇒３２分身⇒１６分身⇒８分身⇒４分身⇒２分身⇒L(3)などとなっている。

厳密には予想であるが、こんなふうになっている。

（注記）

L(3)⇒４分身⇒８分身⇒１６分身⇒３２分身⇒・・・
L(3)⇒６分身⇒１２分身⇒２４分身⇒４８分身⇒・・・

なども当然成り立つが、略す。略す理由は、前者は上の全体での１行目に含まれており、後者は２行目に含まれていて、表示する必要がないからである（冗長となるだけ）。素数のケースだけ書けば十分である。

※※

これがゼータの分岐構造である。

この構造は１個の分身が二つの分身に割れ、その分身がまた二つに割れ・・と次々に枝分かれしていく無限フラクタル構造である。その構造の最終到達地点（ピラミッドの頂点）に位置するのが冒頭の(1)式である。

では、今回６分身を数値で求めた結果を示していく。

６分割では三角関数を数値で求めた結果を前回の（その１６６）に加えた形で、まず示す。３分割は前回のものを転載。

＝＝

■L(3)３分割

$A1= 1 -1/11^3 +1/13^3 -1/23^3 +1/25^3 -1/35^3 + \cdots =(\pi/12)^3\sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12)$

$A2=1/3^3 -1/9^3 +1/15^3 -1/21^3 +1/27^3 -1/33^3 + \cdots =(\pi/12)^3\sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12)$

$A3=1/5^3 -1/7^3 +1/17^3 -1/19^3 +1/29^3 -1/31^3 + \cdots =(\pi/12)^3\sin(\pi/12)/\cos^3(\pi/12)$

$A1 -A2 +A3=L(3)=\pi^3/32$ である。A1, −A2, A3 がL(3)の３分身である。

右辺の三角関数の値は、以下の通り。

$\sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12)= 28 +16\sqrt{3}$

$\sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12)= 2$

$\sin(\pi/12)/\cos^3(\pi/12) = 28 -16\sqrt{3}$

■L(3)６分割

$B1 = 1 -1/23^3 +1/25^3 -1/47^3 +1/49^3 -1/71^3 + \cdots =(\pi/24)^3\sin(11\pi/24)/\cos^3(11\pi/24)$

$B2=1/3^3 -1/21^3 +1/27^3 -1/45^3 +1/51^3 -1/69^3 + \cdots =(\pi/24)^3\sin(9\pi/24)/\cos^3(9\pi/24)$

$B3=1/5^3 -1/19^3 +1/29^3 -1/43^3 +1/53^3 -1/67^3 + \cdots =(\pi/24)^3\sin(7\pi/24)/\cos^3(7\pi/24)$

$B4=1/7^3 -1/17^3 +1/31^3 -1/41^3 +1/55^3 -1/65^3 + \cdots =(\pi/24)^3\sin(5\pi/24)/\cos^3(5\pi/24)$

$B5=1/9^3 -1/15^3 +1/33^3 -1/39^3 +1/57^3 -1/63^3 + \cdots =(\pi/24)^3\sin(3\pi/24)/\cos^3(3\pi/24)$

$B6=1/11^3 -1/13^3 +1/35^3 -1/37^3 +1/59^3 -1/61^3 + \cdots =(\pi/24)^3\sin(\pi/24)/\cos^3(\pi/24)$

$B1 -B2 +B3 -B4 +B5 -B6=L(3)=\pi^3/32$ である。B1, −B2, B3, −B4, B5, −B6 がL(3)の６分身である。

右辺の三角関数の値は、以下の通り。

$\sin(11\pi/24)/\cos^3(11\pi/24)= 16(7+4\sqrt{3}) +4\sqrt{(1554+897\sqrt{3})}$

$\sin(9\pi/24)/\cos^3(9\pi/24) = 8 +6\sqrt{2}$

$\sin(7\pi/24)/\cos^3(7\pi/24) = 16(7-4\sqrt{3}) +4\sqrt{(1554-897\sqrt{3})}$

$\sin(5\pi/24)/\cos^3(5\pi/24) =-16(7-4\sqrt{3}) +4\sqrt{(1554-897\sqrt{3})}$

$\sin(3\pi/24)/\cos^3(3\pi/24) =-8 +6\sqrt{2}$

$\sin(\pi/24)/\cos^3(\pi/24) =-16(7+4\sqrt{3}) +4\sqrt{(1554+897\sqrt{3})}$

＝＝

このように三角関数の数値的表現がまず得られた。$\sqrt{}$しか出ていないことに注目いただきたい（$\sqrt[3]{}$や$\sqrt[7]{}$などは出ない）。

３分割でのそれと合わせて、L(3)の３分身（A1, −A2, A3）と６分身（B1, −B2, B3, −B4, B5, −B6）を数値で表現すると、次となる。

L(3)３分身（A1，-A2，A3）

$A1=(\pi/12)^3(28+16\sqrt{3})$

$-A2=(\pi/12)^3(-2)$

$A3=(\pi/12)^3(28-16\sqrt{3})$

L(3)６分身（B1，-B2，B3，-B4，B5，-B6）

$B1=(\pi/24)^3\{16(7+4\sqrt{3})+4\sqrt{(1554+897\sqrt{3})}\}$

$-B2=(\pi/24)^3\{-8-6\sqrt{2}\}$

$B3=(\pi/24)^3\{16(7-4\sqrt{3})+4\sqrt{(1554-897\sqrt{3})}\}$

$-B4=(\pi/24)^3\{16(7-4\sqrt{3})-4\sqrt{(1554-897\sqrt{3})}\}$

$B5=(\pi/24)^3\{-8+6\sqrt{2}\}$

$-B6=(\pi/24)^3\{16(7+4\sqrt{3})-4\sqrt{(1554+897\sqrt{3})}\}$

上記から、前回見た

$A1=B1-B6$ -----①

$-A2=-B2+B5$ -----②

$A3=B3-B4$ -----③

が成立していることは、すぐにわかる。

３分身のそれぞれが２個に割れることを、今回、数値の上でも確認できた。

このように明示的な特殊値でのゼータの分身の値は、√とか√√とか√√√とか・・とにかく√で表現できる数になる。L(1)でもζ(2)でもそうだったが、L(3)でもそうなっている。

√しか出ないというのは、それが<u>２次方程式の解になっている</u>ということを意味する。２次方程式の解の公式に√が出てくるから√で表現されていく。

今回の例でいうと、分身たちを解にもつ方程式の多項式が、√を含むある数ｋが添加されてできた拡大体Q(k)上での２次方程式にまで因数分解されることを意味する。

※過去の関連ページ（その１５０）（その１５１）（その１５２）（その１５３）

では、今回の６分身が<u>どんな２次方程式から生み出されるか</u>を見ておこう。ただし$(\pi/24)^3$は省いた値を解にもつものである（例えば、-B4なら“$16(7-4\sqrt{3})-4\sqrt{(1554-897\sqrt{3})}$”のこと。）

上記①～③から２次方程式の<u>解と係数の関係</u>をうまく利用できて、割合簡単に６分身の各値を数値的に求めることができる。その過程は略すが、①～③を眺めて下記の各２次方程式に至った経緯を読者自ら考えてほしい。

B1と-B6は、次の２次方程式の解である。

$$x^2-8(28+16\sqrt{3})x-16(2+\sqrt{3})=0$$

-B2とB5は、次の２次方程式の解である。

$$x^2+16x-8=0$$

B3 と-B4 は、次の２次方程式の解である。

$$x^2-8(28-16\sqrt{3})x-16(2-\sqrt{3})=0$$

（その１３６）では、６分身を生み出す６次方程式を見た。

６分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048=0$

その左辺を因数分解すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}&x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048\\&=\{x^2-8(28+16\sqrt{3})x-16(2+\sqrt{3})\}\{x^2+16x-8\}\{x^2-8(28-16\sqrt{3})x-16(2-\sqrt{3})\}\end{aligned}$$

今回求めた各２次方程式にまで因数分解された。面白いではないか。

ゼータ分身たちは、みんな平方根√で表現される数になる。すなわち、定規とコンパスで作図できる数になる。

2020.6.28　杉岡幹生