＜ L(3) 分岐構造　１分身⇒３分身、３分身⇒６分身 ＞

ゼータ分割での分岐構造を調べることにする。今回は３分身が６分身に割れる様子を見たい。流れで言えば（その１６１）からの続きとなる。

“ゼータ分割”というテーマは巨大な大河を形作っている。様々な支流に分かれていて、そのときどきでいろいろな支流を調べているが、この「分岐構造」というのは本流に位置する流れである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 +1/13^3 -1/15^3 +\cdot\cdot\cdot=\pi^3/32$　　-----(1)

まずゼータの分岐構造とはどんなものかを復習しておこう。その全体像を下記に示す。今回調べる部分は赤字にした。

※※※

＜ L(3) 分岐構造 ＞

L(3)⇒２分身⇒４分身 ⇒ ８分身 ⇒１６分身⇒ ３２分身⇒・・・
L(3)⇒３分身⇒６分身 ⇒１２分身⇒２４分身⇒ ４８分身⇒・・・
L(3)⇒５分身⇒１０分身⇒２０分身⇒４０分身⇒８０分身⇒・・・
L(3)⇒７分身⇒１４分身⇒２８分身⇒５６分身⇒１１２分身⇒・・・
・・・・・・・・・・

このように、一個の分身が倍の２個の分身に割れる（分岐する）。素数を起点として倍々ゲームで無限に分岐していく。
逆に無限の彼方から見れば、（先頭行を例に）・・・⇒３２分身⇒１６分身⇒８分身⇒４分身⇒２分身⇒L(3)などとなっている。
厳密には予想であるが、こんなふうになっている。

（注記）

L(3)⇒４分身⇒８分身⇒１６分身⇒３２分身⇒・・・
L(3)⇒６分身⇒１２分身⇒２４分身⇒４８分身⇒・・・
なども当然成り立つが、略す。略す理由は、前者は上の全体での１行目に含まれており、後者は２行目に含まれていて、表示する必要がないからである（冗長となるだけ）。素数のケースだけ書けば十分である。

※※※

これが分岐構造である。

この構造は１個の分身が二つの分身に割れ、その分身がまた二つに割れ・・と次々に枝分かれしていく無限フラクタル構造である。その構造の最終到達地点（ピラミッドの頂点！）に位置するのが冒頭の(1)式である。

さて今回は『１分身⇒３分身』『３分身⇒６分身』の二つを見る。ちなみに１分身は当然ながらＬ(3)そのものを指す。

３分割は（その１３３）、６分割は（その１３６）の結果を抜粋してまずそれらを示す。

＝＝＝

■L(3)３分割

$A1 = 1 - 1/11^3 + 1/13^3 - 1/23^3 + 1/25^3 - 1/35^3 + \cdots = (\pi/12)^3 \sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12)$

$A2 = 1/3^3 - 1/9^3 + 1/15^3 - 1/21^3 + 1/27^3 - 1/33^3 + \cdots = (\pi/12)^3 \sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12)$

$A3 = 1/5^3 - 1/7^3 + 1/17^3 - 1/19^3 + 1/29^3 - 1/31^3 + \cdots = (\pi/12)^3 \sin(\pi/12)/\cos^3(\pi/12)$

$A1 - A2 + A3 = L(3) = \pi^3/32$ である。A1, −A2, A3 がＬ(3)の３分身である。

右辺の三角関数の値は、以下の通り。

$\sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12) = 28 + 16\sqrt{3}$

$\sin(3\pi/12)/\cos^3(3\pi/12) = 2$

$\sin(\pi/12)/\cos^3(\pi/12) = 28 - 16\sqrt{3}$

■L(3)６分割

$B1 = 1 - 1/23^3 + 1/25^3 - 1/47^3 + 1/49^3 - 1/71^3 + \cdots = (\pi/24)^3 \sin(11\pi/24)/\cos^3(11\pi/24)$

$B2 = 1/3^3 - 1/21^3 + 1/27^3 - 1/45^3 + 1/51^3 - 1/69^3 + \cdots = (\pi/24)^3 \sin(9\pi/24)/\cos^3(9\pi/24)$

$B3 = 1/5^3 - 1/19^3 + 1/29^3 - 1/43^3 + 1/53^3 - 1/67^3 + \cdots = (\pi/24)^3 \sin(7\pi/24)/\cos^3(7\pi/24)$

$B4 = 1/7^3 - 1/17^3 + 1/31^3 - 1/41^3 + 1/55^3 - 1/65^3 + \cdots = (\pi/24)^3 \sin(5\pi/24)/\cos^3(5\pi/24)$

$B5 = 1/9^3 - 1/15^3 + 1/33^3 - 1/39^3 + 1/57^3 - 1/63^3 + \cdots = (\pi/24)^3 \sin(3\pi/24)/\cos^3(3\pi/24)$

$B6 = 1/11^3 - 1/13^3 + 1/35^3 - 1/37^3 + 1/59^3 - 1/61^3 + \cdots = (\pi/24)^3 \sin(\pi/24)/\cos^3(\pi/24)$

$B1 - B2 + B3 - B4 + B5 - B6 = L(3) = \pi^3/32$ である。B1, −B2, B3, −B4, B5, −B6 がＬ(3)の６分身である。

＝＝＝

まず『１分身⇒３分身』だが、上記のＬ(3)３分割を見れば、Ｌ(3)つまり１分身が３分身に割れているのがわかる。よって、『１分身⇒３分身』はＯＫである。

では、「３分身⇒６分身」はどうか？

じつは、

$A1 = B1 - B6$ ------①

$-A2 = -B2 + B5$ ------②

$A3 = B3 - B4$ ------③

となっている。

１個の分身が二個の分身に割れている（分岐している）。すなわち、A1 が B1 と−B6 に割れ、−A2 が−B2 と B5 に割れ、そして A3 が B3 と−B4 に割れている。

これは「３分身が６分身に分岐している」ことを示している。

級数での成立は眺めればわかる。右辺値の成立も級数の成立から自明だが、三角関数の倍角公式などを使い容易に確認できる。①の B1 -B6 つまり$(\pi/24)^3\ \{\sin(11\pi/24)/\cos^3(11\pi/24)-\sin(\pi/24)/\cos^3(\pi/24)\}$を手計算すると、A1 つまり$(\pi/12)^3\sin(5\pi/12)/\cos^3(5\pi/12)$まで変形できる。②、③も同様。

念のため①、②、③に関し、Excel で数値計算も行ったがＯＫであった。

よって、「３分身⇒６分身」は成り立っている。

もう一度、①、②、③を見ていただきたい。左辺を全部足せばＬ(3)になる。右辺を全部足してもＬ(3)になる。面白いではないか！

以上から、Ｌ(3)⇒３分身⇒６分身の成立を確かめることができた。

今回のＬ(3)分岐構造は、（その９０）で見たＬ(1)分岐構造のそれと構造がまったく同じであり(今回②の表現を変えたが本質的に同じ)、その類似性と保存のよさに驚かされる。

このようにゼータは倍々ゲームで分身を増やしていく。それは分身という大量の卵を噴き出しているかのようである。

2020.6.21　杉岡幹生