＜ テイラーシステムの公式 ＞

この「ゼータの香り・・」シリーズでは、「ゼータでは、明示的な特殊値（以下明示的な値）の場合を研究することが大事！」と述べてきた。その理由も述べてきたが、抽象的に述べたためわかりにくかったかもしれない。今回はもう少し具体的に説明しておきたい。

まず明示的な値の場合とは、リーマンゼータζ(s)ではζ(2)、ζ(4)、ζ(6)・・であり、L(s)ゼータではL(1)、L(3)、L(5)・・である（注記）。これらは有名であるから、よくご存じであろう。
注記：本当はＬ(χ，ｓ)ゼータでいえることだが、ζ(s)、L(s)をＬ(χ，ｓ)の代表選手として述べていく（ζ(s)もL(s)もＬ(χ，ｓ)ゼータに含まれる)。

これまで、次の意味のことを述べてきた。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータの分身たちは、際立った対称性の世界から出てくる。その姿は極めて美しい。分身が美しいのは、明示的な値（例えばζ(2)とかL(1)とか）を考察しているからである。

明示的な値は“自明な零点”の働きで出てくる。テイラーシステムで導いた公式を見ればそのことがよくわかる。明示的な値はζ(s)の自明な零点ζ(-2)，ζ(-4)，ζ(-6)・・の力で生み出されてくる。

なお、非明示な値（ζ(3)とかL(2)など）の分身の姿は美しくない。複雑怪奇なものになる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

こんなふうに述べてきたが、この説明ではしっくりこないと思う。

以下、式を交えて「明示的な値がζ(s)自明な零点から作られる」という意味を見てみたい。

2006年に、私は現代数学でよくわからないとされるζ(3)、ζ(5)・・を簡単に導出できる方法を発見した。テイラー展開を使うことから、テイラーシステムと命名した。
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page117.htm

それまでも重回積分の方法とかも見つけていたが計算に何時間もかかる使いにくい方法であった。しかし、テイラーシステムを使うと、たった３０分ほどでたちまちに奇数ゼータが求まるという夢のような手法である。高校生でもできる。
しかも、整数点での値のみならず、ζ(3/2)とかζ(√2)とかL(1.78)とかL(π/2)とか任意の実数点での値も求まる！
テイラーシステムを使って、ζ(s)とL(s)の値を出す一般公式を導いた。
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page119.htm　百武彗星（その3）
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page128.htm　タットル彗星（その1）

その公式を示すと、次の通りである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■ζ(s)式　Cos[s＝s,　π/2 代入, πテイラー]

$$(1-1/2^{s})(1-1/2^{(s-1)})\zeta(s)$$
$$= (1-1/2^{(s-3)})\zeta(s-2)(\pi/2)^2/2! - (1-1/2^{(s-5)})\zeta(s-4)(\pi/2)^4/4!$$
$$+ (1-1/2^{(s-7)})\zeta(s-6)(\pi/2)^6/6! - (1-1/2^{(s-9)})\zeta(s-8)(\pi/2)^8/8!$$
$$+ (1-1/2^{(s-11)})\zeta(s-10)(\pi/2)^{10}/10! - (1-1/2^{(s-13)})\zeta(s-12)(\pi/12)^{12}/12!$$
$$\cdots\cdots$$

■L(s)式　Sin[s＝s,　π/2 代入, πテイラー]

$$L(s)=(1-1/2^{(s-2)})\zeta(s-1)(\pi/2)^1/1! - (1-1/2^{(s-4)})\zeta(s-3)(\pi/2)^3/3!$$
$$+ (1-1/2^{(s-6)})\zeta(s-5)(\pi/2)^5/5! - (1-1/2^{(s-8)})\zeta(s-7)(\pi/2)^7/7!$$
$$+ (1-1/2^{(s-10)})\zeta(s-9)(\pi/2)^9/9! - (1-1/2^{(s-12)})\zeta(s-11)(\pi/2)^{11}/11!$$
$$\cdots\cdots$$

注 1:　Cos[ ]や Sin[ ]は、本公式を導いた条件である。公式は他の条件でのバリエーションもあるが、上は代表例である。

注 2:　変数の s は実数である。まだ調べていないが、複素数としても成り立つはずである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

この両式は、ゼータの値を求めるという点において極めて重要である。この公式の特長を二つ述べよう。

****

①　任意の実数点でのゼータの値が求まる。

sにどんな実数を代入しても、ゼータの値が求まる！という優れた特長をもつ。
例えば、s に 15/7 を代入したらζ(15/7)、L(15/7)が出るし、s に√2 を代入したら、ζ(√2)、L(√2)が出るし、どんな実数を入力しても、値が求まるという夢の公式になっている。また−1 を代入してζ(−1)＝−1/12 も出る(−1/12 に収束する)。
注記:テイラーシステムでは、公式を用いて値を導出する途中で関数等式を利用する。

これらの値は、ζ(s)＝「ζ(k)の無限和」となり、また L(s)＝「ζ(k)の無限和」となることが容易にわかる。

②　どうしてζ(2)、ζ(4)、‥や L(1)、L(3)、‥の値が明示的にきっちり求まるのかの理由がわかる。

例えば、s＝2 のζ(2)では、自明な零点ζ(−2)、ζ(−4)、ζ(−6)‥の働きで、上記ζ(s)式の右辺第2項以降が全部ゼロになって第１項のみが残り、それで、

(1−1/2^2)・(1−1/2^(2−1))・ζ(2)＝(1−1/2^(2−3))・ζ(0)・π^2 /(2！・2^2)

となり、$\zeta(2)=\pi^2/6$ と出る。($\zeta(0)=-1/2$ を用いた)

これは $\zeta(4)$、$\zeta(6)$ や L(1)、L(3)、L(5)でもまったく同様である。$\zeta(2)$も一緒に並べる。

$\zeta(2)=\pi^2/6$、$\zeta(4)=\pi^4/90$, $\zeta(6)=\pi^6/945$, $L(1)=\pi/4$, $L(3)=\pi^3/32$, $L(5)=5\pi^5/1536$

****

上の説明で、「明示的な値が、自明な零点の働きで生み出される」という意味がわかったと思う。

公式を眺めているだけで、$\zeta(3)$が「ゼータの無限和」となる理由、$\zeta(2)$が $\pi^2/6$ ときっちり求まってしまう理由がわかり愉しい。

上記公式から**「$\zeta(2)$、$\zeta(4)$‥や L(1)、L(3)‥は、やはり特別な存在だ!」**と感じられるのではなかろうか。

本「ゼータの香りの漂う‥」での分身たちの姿を見れば、そのことは強く感じられるはずである。そこはもの凄い対称性の世界であり、その対称性は$\zeta(s)$の零点に関係していたのである。そして自明な零点は、非自明な零点(リーマン予想)にも関係しているような気がしている‥

以上から、冒頭での「ゼータでは明示的な値を研究することが大事」ということの意味がわかっていただけたと思う。

最後に、課題の整理と備忘録の意味から、構想、予想、妄想、つぶやきなど書いておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 非明示の値の分割を一度だけ実行したことがある。

L(2)の２分割を行い、二分身を得た。１年半前のことである。

http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu2/12745_r4.htm

その姿はやはり醜い。計算は莫大な量に上り、何度も計算ミスをして、ようやく出たのであった。

明示的な値での風景と、非明示の値の景色はまるでちがう!

前者は、究極に美しい(対称性に満ちた)天上界である。後者は、嵐が吹き荒れる地獄界である。

ゼータは零点域のみ美しい。よって、零点が関係している明示的な値を研究することが大事となる。

● 岩澤理論も、ゼータの明示的な値のふしぎを研究する理論である。「ゼータの分割」も同じである。

目的は同じであるが、両者では、歩いている洞窟が違う。

岩澤理論は地下のある地点を目指している。「ゼータの分割」も同じ地点を目指している。ただし掘り進めている洞窟が違う(別のトンネルを進んでいる感じ)。

● 岩澤理論は難解だが、だいたい次のようなものである。

岩澤健吉氏(1917-1998)が創った岩澤理論は、$\zeta(2n)$などの特殊値のふしぎ（意味）を研究するものである。

例えば、$\zeta(12)=691\pi^{12}/638512875$ で、どうして突如 691 という素数が分子に出現するのか？
その理由を、代数体 Q(ζ691)の類数との関係から解明しようとする。
Q(ζ691)の類数が 691 の倍数である⇒$\zeta(12)$に 691 が出現する。$\zeta(12)$の 12 という出現位置の意味も、ある保型形式の式からわかる！

つまり岩澤理論は「ゼータ関数という解析的な対象」と「代数体という代数的な対象である類数（イデアル類群と関係）」という対象を結びつけつつ、ゼータ関数の値のふしぎを解明しようとする理論である。

だいたいこんなイメージと思うが、難しい。

もし「ゼータ分割」の方面から、上の $\zeta(12)=691\pi^{12}/638512875$ を解明しようとすると、以前の奇数出現位置予想での式を考察していくことになろう。
http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu2/12249_t8.htm

ゼータ分割の方面から、691 の意味をさぐることは興味深いテーマである。

● $\zeta(s,q)=1/q^s+1/(q+1)^s+1/(q+2)^s+1/(q+3)^s+\cdots$

このフルヴィッツ・ゼータ関数にテイラーシステムが適用できないか？と考えて、過去何度もアタックしたが成功していない。

テイラーシステムはＬ(χ, ｓ)ゼータで目覚ましい働きをしてくれたのに、フルヴィッツ・ゼーでは働いてくれない。なぜなのか？

この問題は、私の未解決問題である。

● $\zeta(s)=L(s)$無限和の公式は出せないか？ 過去の結果を見直しても、出していないようである。

●テイラーシステムは私の中で最大級の発見であり、忘れることはない。2006 年の発見から２年ほどで多くの成果を得た。結果はこちらに載せている。http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page106.htm

テイラーシステムのあと、フーリエシステムという別の特殊値を出す方法を発見した。

フーリエシステムも優秀な方法だが、求まるのは整数点での値である。テイラーシステムは、実数点での値が求まる。ただし、テイラーシステムでは関数等式を用いる必要があるが、フーリエシステムではそれは必要ないという特徴をもつ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2020.5.31　杉岡幹生

(参考文献)
「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）
「数学のたのしみ　【岩澤数学の全貌】No.15」（日本評論社）
「オイラー無限解析の源流」（高橋浩樹著、現代数学社）