＜ Ｌ(3) 分岐構造　１分身⇒２分身、２分身⇒４分身＞

だいぶＬ(3) 分割も進んできたので、この辺からＬ(3) の分岐構造を見ていくことにする。（その８７）～（その９３）でのＬ(1) の類似、または（その７７）～（その８５）におけるζ(2) の類似をＬ(3) でも行いたいということである。

$$L(3)=1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+1/9^3-1/11^3+1/13^3-1/15^3+\cdots=\pi^3/32 \qquad \text{------①}$$

分岐構造とはどんなものか。まずその全体像を下記に示す。

※※

＜ Ｌ(3) 分岐構造 ＞

Ｌ(3) ⇒２分身⇒４分身 ⇒ ８分身 ⇒１６分身⇒ ３２分身⇒・・・
Ｌ(3) ⇒３分身⇒６分身 ⇒１２分身⇒２４分身⇒ ４８分身⇒・・・
Ｌ(3) ⇒５分身⇒１０分身⇒２０分身⇒４０分身⇒８０分身⇒・・・
Ｌ(3) ⇒７分身⇒１４分身⇒２８分身⇒５６分身⇒１１２分身⇒・・・
・・・・・・・・・・

このように、一個の分身が倍の２個の分身に割れる（分岐する）。素数を起点として倍々ゲームで無限に分岐していく。
逆に無限の彼方から見れば、（先頭行を例に）・・・⇒３２分身⇒１６分身⇒８分身⇒４分身⇒２分身⇒Ｌ(3) などとなっている。
厳密には予想であるが、こんなふうになっている。

（注記）
Ｌ(3) ⇒４分身⇒８分身⇒１６分身⇒３２分身⇒・・・
Ｌ(3) ⇒６分身⇒１２分身⇒２４分身⇒４８分身⇒・・・
なども当然成り立つが、略す。略す理由は、前者は上の全体での１行目に含まれており、後者は２行目に含まれていて、表示する必要がないからである（冗長となるだけ）。素数のケースだけ書けば十分である。

※※

これが分岐構造である。

この構造は、１個の分身が二つの分身に割れ、割れた分身がまた二つに割れ・・と次々に枝分かれしていく無限のフラクタル構造である。そんな壮大な構造がゼータ世界の地下に存在している。その超巨大ピラミッドの最終到達地点（頂点）に位置するのが①式である。
①式をながめているだけではそんなことは全くわからないのだが、単純な①の真下に想像を絶する美しいものが隠されている。①は究極の対称性が作り上げた宝玉である。Ｌ(1) とζ(2) でそんな調和の世界を体験してきたが、Ｌ(3) でも体感してみよう。

なお、これまで“分岐”を“分解”とも言っていたが、１個の分身が二個の分身に割れるケースをとくに「分岐する」と呼ぶことにしよう。

“分割”は、１個のゼータが多数の分身に一挙に分裂するケースに主に使ってきたが、その場合は、分割と呼んだり、分解と呼んだりしてきた。それは今後も同じである。

さて、今回は、『L(3)⇒２分身』と『２分身⇒４分身』の二つの場合を見てみることにしよう。
２分身（２分割）は（その１３３）、４分身（４分割）は（その１３４）の結果を抜粋して利用する。まずそれらを示す。

＝＝

■L(3)２分割

$A1= 1 - 1/7^3 +1/9^3 -1/15^3 + 1/17^3 -1/23^3 + \cdots =(\pi/8)^3\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$

$A2=1/3^3 -1/5^3 +1/11^3 -1/13^3 + 1/19^3 -1/21^3 + \cdots =(\pi/8)^3\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$

$A1 -A2=L(3)=\pi^3/32$ である。A1, −A2 が L(3)の２分身である。$(\pi/8)^3$ を除いた右辺の三角関数の値は、以下の通り。

$\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)= 8 +6\sqrt{2}$

$\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8) = -8 +6\sqrt{2}$

■L(3)４分割

$B1= 1 -1/15^3 +1/17^3 -1/31^3 +1/33^3 -1/47^3 + \cdots =(\pi/16)^3\sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)$

$B2=1/3^3 -1/13^3 +1/19^3 -1/29^3 +1/35^3 -1/45^3 + \cdots =(\pi/16)^3\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)$

$B3=1/5^3 -1/11^3 +1/21^3 -1/27^3 +1/37^3 -1/43^3 + \cdots =(\pi/16)^3\sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)$

$B4=1/7^3 -1/9^3 +1/23^3 -1/25^3 +1/39^3 -1/41^3 + \cdots =(\pi/16)^3\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16)$

$B1 -B2 +B3 -B4=L(3)=\pi^3/32$ である。B1, −B2, B3, −B4 が L(3)の４分身である。
$(\pi/16)^3$ を除いた右辺値の三角関数の値は、次の通りである。

B1⇒ $\sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)= 32 +24\sqrt{2} +16\sqrt{(2+\sqrt{2})} +14\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

B2⇒ $\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)=-32 +24\sqrt{2} -16\sqrt{(2-\sqrt{2})} +14\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

B3⇒ $\sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)= 32 -24\sqrt{2} -16\sqrt{(2-\sqrt{2})} +14\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

B4⇒ $\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16) =-32 -24\sqrt{2} +16\sqrt{(2+\sqrt{2})} +14\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

$B1 -B2 +B3 -B4=L(3)=\pi^3/32$ の計算で、√が全てきれいに消えていく様を味わっていただきたい。
ゼータの値は、みな見事な対称性に満ちているのである！

＝＝

　では分身が二つに割れていく様子を見ていこう。
まず「Ｌ(3)⇒２分身」の場合に関して。

　上記Ｌ(3)２分割 から、Ｌ(3)＝ A1 −A2 となっている。つまり、
　　Ｌ(3)⇒２分身
となっていて、冒頭の分岐構造は成り立っている。ＯＫ.

　次に、「２分身⇒４分身」の場合はどうか？

じつは、
　A1＝B1 −B4
　A2＝B2 −B3
となっているのだが、気づかれただろうか。１個の分身が二個の分身に割れている（分岐している)、つまり、A1 が B1 と−B4 に割れ、A2 が B2 と−B3 に割れている。これは「２分身が４分身に分岐している」ことを示している。
　級数での成立は眺めればわかる。右辺値での成立も（級数の成立から自明だが)、簡単に確かめられる。上記Ｌ(3)４分割で三角関数値を√の値でも示しているので成立を自分で確かめてほしい。右辺値でもたしかに
　A1＝B1 −B4
　A2＝B2 −B3
が成立している！　両分身の間には、こんな驚くべき関係性が存在しているのである。

　よって、「２分身⇒４分身」は成り立っている。

以上から、今回は、冒頭の分岐構造のうち、
　　　Ｌ(3)⇒２分身⇒４分身
ここまでの成立を確かめられた。

　このようにゼータは、倍々ゲームで分身を増やしていくのである。

2020.5.15　杉岡幹生