＜ L(3) １６分割 ＞

１５分割に続いて、L(3)の１６分割を示す。

L(3)は、L(s)ゼータのｓに 3 を代入したもので、次のものである。

$$L(3)=1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+1/9^3-1/11^3+1/13^3-1/15^3+\cdots=\pi^3/32 \quad \text{------①}$$

結果を示すと、以下の通りである。

＝＝＝

■L(3) １６分割

$A1 = 1-1/63^3+1/65^3-1/127^3+1/129^3-1/191^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(31\pi/64)/\cos^3(31\pi/64)$

$A2 = 1/3^3-1/61^3+1/67^3-1/125^3+1/131^3-1/189^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(29\pi/64)/\cos^3(29\pi/64)$

$A3 = 1/5^3-1/59^3+1/69^3-1/123^3+1/133^3-1/187^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(27\pi/64)/\cos^3(27\pi/64)$

$A4 = 1/7^3-1/57^3+1/71^3-1/121^3+1/135^3-1/185^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(25\pi/64)/\cos^3(25\pi/64)$

$A5 = 1/9^3-1/55^3+1/73^3-1/119^3+1/137^3-1/183^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(23\pi/64)/\cos^3(23\pi/64)$

$A6 = 1/11^3-1/53^3+1/75^3-1/117^3+1/139^3-1/181^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(21\pi/64)/\cos^3(21\pi/64)$

$A7 = 1/13^3-1/51^3+1/77^3-1/115^3+1/141^3-1/179^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(19\pi/64)/\cos^3(19\pi/64)$

$A8 = 1/15^3-1/49^3+1/79^3-1/113^3+1/143^3-1/177^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(17\pi/64)/\cos^3(17\pi/64)$

$A9 = 1/17^3-1/47^3+1/81^3-1/111^3+1/145^3-1/175^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(15\pi/64)/\cos^3(15\pi/64)$

$A10 = 1/19^3-1/45^3+1/83^3-1/109^3+1/147^3-1/173^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(13\pi/64)/\cos^3(13\pi/64)$

$A11 = 1/21^3-1/43^3+1/85^3-1/107^3+1/149^3-1/171^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(11\pi/64)/\cos^3(11\pi/64)$

$A12 = 1/23^3-1/41^3+1/87^3-1/105^3+1/151^3-1/169^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(9\pi/64)/\cos^3(9\pi/64)$

$A13 = 1/25^3-1/39^3+1/89^3-1/103^3+1/153^3-1/167^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(7\pi/64)/\cos^3(7\pi/64)$

$A14 = 1/27^3-1/37^3+1/91^3-1/101^3+1/155^3-1/165^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(5\pi/64)/\cos^3(5\pi/64)$

$A15 = 1/29^3-1/35^3+1/93^3-1/99^3+1/157^3-1/163^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(3\pi/64)/\cos^3(3\pi/64)$

$A16 = 1/31^3-1/33^3+1/95^3-1/97^3+1/159^3-1/161^3+\cdots = (\pi/64)^3\sin(\pi/64)/\cos^3(\pi/64)$

$A1-A2+A3-A4+A5-A6+A7-A8+A9-A10+A11-A12+A13-A14+A15-A16=L(3)=\pi^3/32$ である。

A1,−A2,A3,−A4,A5,−A6,A7,−A8,A9,−A10,A11,−A12,A13,−A14,A15,−A16 がL(3)の１６分身である。

念のため、上の全式に対し Excel マクロで数値検証したが、左辺級数と右辺値は一致した。

＝＝＝

導出方法は以下の通りである。

＝＝

[分身の導出方法]

上の分割級数(分身)の導出方法の概要を示す。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$1/(1^2-x^2)\ +1/(3^2-x^2)\ +1/(5^2-x^2)\ +\cdot\cdot=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式②を使う。

$1/(1^2-x^2)^3\ +1/(3^2-x^2)^3\ +1/(5^2-x^2)^3\ +\cdot\cdot=(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)\ +\ \mathrm{Others}(x)$ ----②

右辺の Others(x)は L(3)に関係しない関数なので（じつはζ(2)と L(1)に関係)、”Others(x)”とした。
ここで Others(x)は次のものである。

$\mathrm{Others}(x)=\ -(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2)\ +(3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$

じつは、はじめのπ^{2}の項がζ(2)に関係し、二つ目のπの項が L(1)に関係している。

さて、次のように上記②の x に特定の値を代入することで L(3)の分身が次々に求まっていく。

②の x に{32-(2n-1)}/32 を代入すると、An が得られる。ここで n は 1 から 16 の整数。
例えば n=3 として②の x に 27/32 を代入すると、A3 が得られる。

（注記）②の左辺級数から L(1)とζ(2)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺の L(1)とζ(2)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単に L(3)の分割級数（分身）を求めることができる。L(5)，L(7)・・でも類似的に同様にできる。

＝＝

このように１６分身が求まった。

一見、冗長に見える分割作業を延々と行っているのは、L(3)においても、L(1)で見た「分身が次の段階の分身を生み出す」という同類の構造を示したいからである。
例えば、L(1)での(その89)他で見た「一つの分身が二つの分身に割れていく」という構造・・

このような倍々ゲームから成るピラミッド的なフラクタル構造の上にゼータは成り立っている。

2020.5.9　杉岡幹生