＜ L(1)分割微分方程式の一般解(n が負の場合）＞

（その１５７）で、L(1)分割微分方程式に対し、n が正の場合の一般解を報告した。今回、n が負の場合の一般解も見出したので報告したい。さらに、それに付随してシンプルな特殊解を構成することができた。
　n が正と負の値の両方で解が求まったので、0 を除く全ての整数点での一般解が見出せたことになる。

　はじめに L(1)分身を生み出す固有方程式（多項式)、微分方程式、漸化式、そして一般解を掲げておく。
前回の n が正の値での一般解に、今回の n が負の値の場合も加えた形で、先に結果を示しておく。以下の通りである。

なお、前回注意した通り、“L(1)分割微分方程式”は「L(1)分割固有方程式の多項式関数を解にもつ微分方程式」を短くした呼び名である。

L(1)は、L(s)ゼータの s＝1 のもので、次のものである。

　L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +1/9 −1/11 +1/13 −1/15 +・・＝π/4

[L(1)の場合]

L (1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad \text{-----}[1]$$

(n=1, 2, 3・・)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\} = n(1-n)y \quad \text{------}[2]$$

　[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。
[1]と[2]は以下の L(1) n 分身の値を解に持つ固有方程式での y＝左辺多項式を解にもつ。例えば L(1) ３分身の場合、n=3 とした[1]と[2]は、$y=x^3-3x^2-3x+1$ を特殊解に持つ。

　L(1) １分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x-1=0$
　L(1) ２分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^2-2x-1=0$
　L(1) ３分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^3-3x^2-3x+1=0$
　L(1) ４分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$
　L(1) ５分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$
　L(1) ６分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1=0$
　L(1) ７分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0$
　　・
　　・

　n 分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）の多項式を $L_n(x)$ とおくと、上記から次となる。

＜ L(1)分割固有方程式の多項式 $L_n(x)$ ＞

・

・

$L_{-7}(x)=(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)/(x^2+1)^7$

$L_{-6}(x)=(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)/(x^2+1)^6$

$L_{-5}(x)=(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)/(x^2+1)^5$

$L_{-4}(x)=(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)/(x^2+1)^4$

$L_{-3}(x)=(x^3+3x^2-3x-1)/(x^2+1)^3$

$L_{-2}(x)=(x^2+2x-1)/(x^2+1)^2$

$L_{-1}(x)=(x+1)/(x^2+1)$

$L_0(x)=1$

$L_1(x)=x-1$

$L_2(x)=x^2-2x-1$

$L_3(x)=x^3-3x^2-3x+1$

$L_4(x)=x^4-4x^3-6x^2+4x+1$

$L_5(x)=x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1$

$L_6(x)=x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1$

$L_7(x)=x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1$

・

・

上記の多項式 $L_n(x)$ に対する漸化式は、次のようになる。

＜L(1)分割固有方程式の多項式 $L_n(x)$ に対する漸化式＞

$$L_{n+2}(x)-2xL_{n+1}(x)+(x^2+1)L_n(x)=0 \quad -----[3]$$

(n=・・, -3-, 2, -1, 0, 1, 2, 3・・)

●L(1)分割微分方程式[1]または[2]の一般解（n が任意の整数値（0 は除く）での解）

・

・

n=-7 の場合

$y=\{c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)+c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)\}/(x^2+1)^7$

n=-6 の場合

$y=\{c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)\}/(x^2+1)^6$

n=-5 の場合　$y=\{c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)\}/(x^2+1)^5$

n=-4 の場合　$y=\{c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)\}/(x^2+1)^4$

n=-3 の場合　$y=\{c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)\}/(x^2+1)^3$

n=-2 の場合　$y=\{c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)\}/(x^2+1)^2$

n=-1 の場合　$y=\{c_1(x-1)+c_2(x+1)\}/(x^2+1)$

n=1 の場合　$y=c_1(x-1)+c_2(x+1)$

n＝2 の場合　$y=c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)$
n＝3 の場合　$y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$
n＝4 の場合　$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$
n＝5 の場合　$y=c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)$
n＝6 の場合　$y=c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)$
n＝7 の場合　$y=c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)$
$+c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)$

・
・

ここで、c_1 と c_2 は任意の定数である。

$c_1=c_2=1$ として次の特殊解を得る。（微分方程式が線形だから分子の 2 は省いた）

[L(1)分割微分方程式におけるシンプルな表現の特殊解]

・
・

n＝-7 の場合　$y=(x^7-21x^5+35x^3-7x)/(x^2+1)^7$
n＝-6 の場合　$y=(x^6-15x^4+15x^2-1)/(x^2+1)^6$
n＝-5 の場合　$y=(x^5-10x^3+5x)/(x^2+1)^5$
n＝-4 の場合　$y=(x^4-6x^2+1)/(x^2+1)^4$
n＝-3 の場合　$y=(x^3-3x)/(x^2+1)^3$
n＝-2 の場合　$y=(x^2-1)/(x^2+1)^2$
n＝-1 の場合　$y=x/(x^2+1)$
n＝1 の場合　$y=x$
n＝2 の場合　$y=x^2-1$
n＝3 の場合　$y=x^3-3x$
n＝4 の場合　$y=x^4-6x^2+1$
n＝5 の場合　$y=x^5-10x^3+5x$
n＝6 の場合　$y=x^6-15x^4+15x^2-1$
n＝7 の場合　$y=x^7-21x^5+35x^3-7x$

・
・

---

n が負の場合の一般解を導出した過程を以下に粗く示す。

[n が負の値での一般解を見出した過程]

前回は、n が正の値の場合(n＝1,2,3,・・)の一般解を見出した。その場合は、もう一つ別の独立解として n が負の値の場合の特殊解の分子部分を使った。すなわち、正の値での元々の特殊解と、負の値の場合の特殊解の分子の部分の特殊解とそれら二つの独立解を使って、一般解を構成した。

では、n が負の値の場合の一般解はどうなるのか？正の値の場合の類似ができるのではないか？

n が負の値の場合（n=-k）の特殊解 A は、（その１５５）で出した漸化式からそのまま延長的に導出できた。さて、負の値の場合でのもう一つ別の独立解はなにか？それは、分母は特殊解 A のままで、分子が対応する正の値（n=k）の場合の多項式に置き換えた関数ではなかろうか。予想は的中し、正解であった。

例えば、n=3 の場合の特殊解は $y=x^3-3x^2-3x+1$ である。
$n=-3$ の場合の特殊解は $y=(x^3+3x^2-3x-1)/(x^2+1)^3$ である（漸化式から出る）。この $n=-3$ の場合のもう一つ別の独立解を得たいが、どうすればよいだろうか。それは、分子を n=3 の場合の特殊解に置き換えた $y=(x^3-3x^2-3x+1)/(x^2+1)^3$ なのである！
$n=-3$ での独立解が二つ見つかったので、これで一般解が得られたことになる。（２次の微分方程式を考えているので、独立解は二つで OK）

n=3 と n=-3 の場合をまとめよう。

n=3 の場合の一般解は、　$y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$ となる。
n=-3 の場合の一般解は、　$y=\{c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)\}/(x^2+1)^3$ となる。

分母だけ違って、分子は全く同じであることに注目したい。

他の n でも、同様である。このようにして n が負の値での一般解が求まった。

正の場合と負の場合の両方が求まったので、0 を除く全ての整数点での一般解が求まった。
[終わり]
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように負の値の場合も、正の場合の類似を行うことで自然に導出できた。うまくできている。

上方で示したように、シンプルな表現の特殊解の方もやはり綺麗な形になった。

最後に備忘録と整理の意味から、予想、構想、妄想、つぶやきを書いておく。

****

●L(1)では、負の方向の一般解は簡単に求まった。
ξ(2)も簡単だろうと思ったが、驚くべきことにξ(2)では特別なことが起こっていて、一般解は簡単に出ない。理由は、正の場合の多項式と負の場合の分子の多項式が同じになるからである。L(1)での類似ができない・・
ξ(2)分割微分方程式　$2x(x-1)y''-\{(4n-3)x-(4n-2)\}y'+n(2n-1)y=0$
は、ガウスの超幾何微分方程式である。その一般解は知られていて、それで求めると、もう一つの別の独立解は級数での表現になってしまった！　ξ(2)ではシンプルな多項式関数の解が得られない。もしかしたら、その

級数解もシンプルな関数にできるのかもしれないが、わからない。そんなこんなでζ(2)の場合の一般解を求めるのは、いったん中断である。将来、求まればよいが・・・。

●L(1)でもζ(2)でも、多項式は直交多項式に違いないが、公式集にある積分での形で直交性を示すのは難しい。まだ得られていない。∫K(x)LmLn=0 を示したいのだが。K(x)は何になるか？積分範囲は？

●前回、チェビシェフ、ラゲール、エルミート、ルジャンドルの有名多項式は全て、負の値の場合は、成り立たないと述べたが、思い違いをしていた（訂正校を送った）。チェビシェフ多項式だけは、負の値の場合も漸化式が成り立っている！　負の場合(n=-k)と正の場合(n=k)で全く同じ多項式関数となる。

公式集には、チェビシェフ微分方程式　$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$　の解は、n が 0 以上の整数値でしか記されていないが、n が負の値での多項式関数も解になっている。

チェビシェフの状況はζ(2)の場合とすこし似ている（下方を参照）。ζ(2)分割の多項式たちは変数変換で、チェビシェフ多項式につながっていることは以前に見た。この類似性はある意味当然なのか・・

●L(3)分割の微分方程式はまだ出していないが、L(1)のものと似るのか？ζ(4)は？

●L(1)やζ(2)の場合の多項式を生み出す母関数もまだ見つけていない。

●L(1)分割微分方程式の一般解を眺めよう。(c_1 と c_2 は、任意の定数)

・

・

n=-7 の場合

$y=\{c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1) + c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)\}/(x^2+1)^7$

n=-6 の場合

$y=\{c_1(x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1) + c_2(x^6 +6x^5 -15x^4 -20x^3 +15x^2 +6x -1)\}/(x^2+1)^6$

n=-5 の場合　$y=\{c_1(x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1) + c_2(x^5 +5x^4 -10x^3 -10x^2 +5x +1)\}/(x^2+1)^5$

n=-4 の場合　$y=\{c_1(x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1) + c_2(x^4 +4x^3 -6x^2 -4x +1)\}/(x^2+1)^4$

n=-3 の場合　$y=\{c_1(x^3 -3x^2 -3x +1) + c_2(x^3 +3x^2 -3x -1)\}/(x^2+1)^3$

n=-2 の場合　$y=\{c_1(x^2 -2x -1) + c_2(x^2 +2x -1)\}/(x^2+1)^2$

n=-1 の場合　$y=\{c_1(x -1) + c_2(x+1)\}/(x^2+1)$

n=1 の場合　$y=c_1(x -1) + c_2(x+1)$

n=2 の場合　$y=c_1(x^2 -2x -1) + c_2(x^2 +2x -1)$

n=3 の場合　$y=c_1(x^3 -3x^2 -3x +1) + c_2(x^3 +3x^2 -3x -1)$

n=4 の場合　$y=c_1(x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1) + c_2(x^4 +4x^3 -6x^2 -4x +1)$

n=5 の場合　$y=c_1(x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1) + c_2(x^5 +5x^4 -10x^3 -10x^2 +5x +1)$

n=6 の場合　$y=c_1(x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1) + c_2(x^6 +6x^5 -15x^4 -20x^3 +15x^2 +6x -1)$

n=7 の場合　$y=c_1(x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1)$

$+c_2(x^7 +7x^6 -21x^5 -35x^4 +35x^3 +21x^2 -7x -1)$

・

・

ここで、c_1 と c_2 は任意の定数である。

c_1とc_2の()内のそれぞれの一連の多項式は、符号を除いて係数はパスカル三角形から構成されている。これらの基本解を“パスカル解”と名付けると、L(1)分割微分方程式の一般解は二つのパスカル解から成る、といえる。美しい。

●ζ(2)でも、その漸化式は負の値の場合も成り立っていることが分かった。以下の通り。

ζ(2) n 分割の微分方程式

$$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x-(4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0 \qquad \text{----①}$$

(n=1, 2, 3, ・・)

または

$$x\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}\left\{x\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}(y/x^n)\right\} = -n^2(y/x^n) \qquad \text{----②}$$

①と②は本質的に同じ微分方程式である。

①と②は以下の ζ(2) n 分身の値を解に持つ固有方程式での y=左辺多項式を解にもつ。例えば、ζ(2) 3分身の場合、n=3 とした①または②は、$y=x^3-18x^2+48x-32$ を特殊解に持つ。

ζ(2) 1分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x-2=0$

ζ(2) 2分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^2-8x+8=0$

ζ(2) 3分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^3-18x^2+48x-32=0$

ζ(2) 4分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^4-32x^3+160x^2-256x+128=0$

ζ(2) 5分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^5-50x^4+400x^3-1120x^2+1280x-512=0$

ζ(2) 6分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^6-72x^5+840x^4-3584x^3+6912x^2-6144x+2048=0$

ζ(2) 7分身の値を解に持つ固有方程式⇒$x^7-98x^6+1568x^5-9408x^4+26880x^3-39424x^2+28672x-8192=0$

・

・

n 分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）の多項式を $Z_n(x)$とおくと、上記から次となる。

下記の漸化式③は、n が負の値でも成り立つのでその場合の多項式も記した。(その多項式関数は、微分方程式①, ②の解となる)

＜多項式 $Z_n(x)$ ＞

・

・

$Z_{-7}(x)=(x^7-98x^6+1568x^5-9408x^4+26880x^3-39424x^2+28672x-8192)/x^{14}$

$Z_{-6}(x)=(x^6-72x^5+840x^4-3584x^3+6912x^2-6144x+2048)/x^{12}$

$Z_{-5}(x)=(x^5-50x^4+400x^3-1120x^2+1280x-512)/x^{10}$

$Z_{-4}(x)=(x^4-32x^3+160x^2-256x+128)/x^8$

$Z_{-3}(x)=(x^3-18x^2+48x-32)/x^6$

$Z_{-2}(x)=(x^2-8x+8)/x^4$

$Z_{-1}(x)=(x-2)/x^2$

$Z_0(x)=1$

$Z_1(x) = x - 2$

$Z_2(x) = x^2 - 8x + 8$

$Z_3(x) = x^3 - 18x^2 + 48x - 32$

$Z_4(x) = x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128$

$Z_5(x) = x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512$

$Z_6(x) = x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048$

$Z_7(x) = x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192$

・

・

上記の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式は、次のようになる。

＜ζ(2)分割固有方程式の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式＞

$$Z_{n+2}(x) - 2(x-2)Z_{n+1}(x) + x^2 Z_n(x) = 0 \quad \text{-----③}$$

(n=・・-3,-2,-1,0,1,2,3・・)

****

2020.5.5　杉岡幹生

＜参考文献＞

「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Muray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳)

「数学公式Ⅲ」(森口・宇田川・一松 著、岩波書店)