＜ L(1)分割微分方程式の一般解とシンプルな特殊解 ＞ rev1.01

L(1)分割固有方程式の多項式を解にもつ微分方程式に対し、その一般解を見出したので報告したい。それに付随してシンプルな特殊解を構成することができた。

はじめにL(1)分身を生み出す固有方程式（多項式)、微分方程式、漸化式を掲げておく。ついでにζ(2)の場合のそれらも示した。

なお「L(1)分割固有方程式の多項式を解にもつ微分方程式」は長いので、今後“L(1)分割微分方程式”という呼び名を多用していく。

L(1)は、L(s)ゼータの s＝1 のもので、次のものである。

L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +1/9 −1/11 +1/13 −1/15 +・・＝π/4

[L(1)の場合]

L(1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad \text{-----}[1]$$

(n=1, 2, 3・・)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\} = n(1-n)y \quad \text{------}[2]$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

[1]と[2]は以下のL(1) n 分身の値を解に持つ固有方程式での y＝左辺多項式を解にもつ。例えばL(1) ３分身の場合、n＝3 とした[1]と[2]は、y＝x^3 −3x^2 −3x +1 を特殊解に持つ。

L(1) １分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x -1=0$

L(1) ２分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^2 -2x -1=0$

L(1) ３分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^3 -3x^2 -3x +1=0$

L(1) ４分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$

L(1) ５分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$

L(1) ６分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$

L(1) ７分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0$

・

・

n 分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）の多項式を $L_n(x)$ とおくと、上記から次となる。

＜ L(1)分割固有方程式の多項式 $L_n(x)$ ＞

$L_1(x)=x-1$

$L_2(x)=x^2-2x-1$

$L_3(x)=x^3-3x^2-3x+1$

$L_4(x)=x^4-4x^3-6x^2+4x+1$

$L_5(x)=x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1$

$L_6(x)=x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1$

$L_7(x)=x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1$

・

・

上記の多項式 $L_n(x)$ に対する漸化式は、次のようになる。

＜L(1)分割固有方程式の多項式 $L_n(x)$ に対する漸化式＞

$$L_{n+2}(x)-2xL_{n+1}(x)+(x^2+1)L_n(x)=0 \quad \text{-----[3]}$$

(n＝1, 2, 3・・)

[ζ(2)の場合]

ζ(2) n 分割の微分方程式

$$2x(x-1)y''-\{(4n-3)x-(4n-2)\}y'+n(2n-1)y=0 \quad \text{----①}$$

(n=1, 2, 3, ・・)

または

$$x\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}\left\{x\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}(y/x^n)\right\}=-n^2(y/x^n) \quad \text{----②}$$

①と②は本質的に同じ微分方程式である。

①と②は以下のζ(2) n 分身の値を解に持つ固有方程式での y＝左辺多項式を解にもつ。例えば、ζ(2) 3分身の場合、n=3 とした①または②は、$y=x^3-18x^2+48x-32$ を特殊解に持つ。

ζ(2) 1分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x-2=0$

ζ(2) 2分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^2-8x+8=0$

ζ(2) 3分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^3-18x^2+48x-32=0$

ζ(2) 4分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^4-32x^3+160x^2-256x+128=0$

ζ(2) 5分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^5-50x^4+400x^3-1120x^2+1280x-512=0$

ζ(2) 6分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^6-72x^5+840x^4-3584x^3+6912x^2-6144x+2048=0$

ζ(2) 7分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^7-98x^6+1568x^5-9408x^4+26880x^3-39424x^2+28672x-8192=0$

・

・

n 分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）の多項式を $Z_n(x)$ とおくと、上記から次となる。

＜ ξ(2)分割固有方程式の多項式 $Z_n(x)$ ＞

$Z_1(x)=x-2$

$Z_2(x)=x^2-8x+8$

$Z_3(x)=x^3-18x^2+48x-32$

$Z_4(x)=x^4-32x^3+160x^2-256x+128$

$Z_5(x)=x^5-50x^4+400x^3-1120x^2+1280x-512$

$Z_6(x)=x^6-72x^5+840x^4-3584x^3+6912x^2-6144x+2048$

$Z_7(x)=x^7-98x^6+1568x^5-9408x^4+26880x^3-39424x^2+28672x-8192$

・

・

上記の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式は、次のようになる。

＜ξ(2)分割固有方程式の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式＞

$$Z_{n+2}(x)-2(x-2)Z_{n+1}(x)+x^2Z_n(x)=0 \quad \text{-----③}$$

（n＝1,2,3・・）

今回求まったL(1)分割微分方程式[1]（または[2]）の一般解を示すと、次のようになる。

****

●L(1)分割微分方程式の一般解

n＝1 の場合　$y=c_1(x-1)+c_2(x+1)$

n＝2 の場合　$y=c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)$

n＝3 の場合　$y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$

n＝4 の場合　$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$

n＝5 の場合　$y=c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)$

n＝6 の場合　$y=c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)$

n＝7 の場合　$y=c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)$

$+c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)$

・

・

ここで、c_1 と c_2 は、任意の定数である。

****

どうやってこの一般解に行きついたのか、その過程を粗く示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[一般解を見出した過程]

（その１５５）で見出した[3]の漸化式 $L_{n+2}(x)\ -2xL_{n+1}(x)\ +(x^2+1)L_n(x)\ =0$ の n が負の場合が気になった。この漸化式は n＝1 以上で成り立つものだが、もしかしたら 0 を含めて、n が負でも成り立つのではないか？とふと思った。調べた結果、n が負の値でも成り立っている（微分方程式の解になっている）と分かった。

有名なチェビシェフ多項式、エルミート多項式、ラゲール多項式、ルジャンドル多項式ではどうなのか？気になり調べると、チェビシェフ以外は、負の方向は成り立っていない。チェビシェフのみ負の値でも成り立っている。

結局、L(1)分割微分方程式の特殊解を、n が負と 0 と正の全ての場合で示すと、次となる。

・

・

$L_{-7}(x)=(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)/(x^2+1)^7$

$L_{-6}(x)=(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)/(x^2+1)^6$

$L_{-5}(x)=(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)/(x^2+1)^5$

$L_{-4}(x)=(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)/(x^2+1)^4$

$L_{-3}(x)=(x^3+3x^2-3x-1)/(x^2+1)^3$

$L_{-2}(x)=(x^2+2x-1)/(x^2+1)^2$

$L_{-1}(x)=(x+1)/(x^2+1)$

$L_0(x)=1$

$L_1(x)=x-1$

$L_2(x)=x^2-2x-1$

$L_3(x)=x^3-3x^2-3x+1$

$L_4(x)=x^4-4x^3-6x^2+4x+1$

$L_5(x)=x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1$

$L_6(x)=x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1$

$L_7(x)=x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1$

・

・

美しい形である。

漸化式 $L_{n+2}(x)\ -2xL_{n+1}(x)\ +(x^2+1)L_n(x)\ =0$ に対し、n に負の値を代入していくと、このようにマイナス方向の多項式解がどんどんと求まっていく。

そして、これらが L(1)分割微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \qquad \text{-----}[1]$$

の解になっていることは容易に確認できる。

この微分方程式の過去の研究から、私は、n が負の値(−k)の解の分子部分は正の値(k)での解になるのではないか？とふと思った。カンでそう思った。

例えば、$L_{-3}(x)=(x^3+3x^2-3x-1)/(x^2+1)^3$では、分子の$x^3+3x^2-3x-1$がn=3（n=-3ではなく！）での解になっているのではなかろうか？

n=3では$L_3(x)=x^3-3x^2-3x+1$が特殊解として既にあるが、さらにn=3でのもう一つの別の独立な特殊解が$L_{-3}(x)$の分子の$y=x^3+3x^2-3x-1$なのではないか？調べると、それは正しいと分かった。

L(1)分割微分方程式$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0$ -----[1]
は、変数係数の線形２階同次常微分方程式であり、独立解がもう一つ見つかれば一般解を構成できる。

nが正の値(k)におけるもう一つの独立解は、負の値(-k)での解の分子を拾ってくればよいと分かった。
したがって、n=3の場合は、$y_1=x^3-3x^2-3x+1$と$L_{-3}(x)$の分子の$y_2=x^3+3x^2-3x-1$が独立解（一次独立）となる。ロンスキー行列式が0とならないことから二つは独立と言える。

y_1とy_2の二つはn=3の解集合におけるベクトル空間（線形空間）を張ることができ、この二つでn=3での[1]の解全体を表現できる。y_1とy_2は基本解となっている。

他のnでも、まったく同様である。このようにしてnが正の値での一般解が求まった。
[終わり]
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにしてnが正の値での一般解にたどり着くことができた。
（nが負の場合の一般解は、あと回し）

一般に、変数係数の微分方程式の一般解を見出すのは簡単ではない。定数係数では決まりきった解法が確立しているが、変数係数になるとかなり難しくなる。今回は偶然の発見から一般解を見出すことができ、運がよかった。

一般解を再掲しよう。

●L(1)分割微分方程式の一般解

n=1の場合　$y=c_1(x-1)+c_2(x+1)$
n=2の場合　$y=c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)$
n=3の場合　$y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$
n=4の場合　$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$
n=5の場合　$y=c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)$
n=6の場合　$y=c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)$
n=7の場合　$y=c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)$
$+c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)$
・
・

ここで、c_1とc_2は、任意の定数である。

この一般解からさらに面白いことがわかる。$c_1=c_2=1$として計算すると次の特殊解を得る。

n＝1 の場合　$y=2x$
n＝2 の場合　$y=2(x^2-1)$
n＝3 の場合　$y=2(x^3-3x)$
n＝4 の場合　$y=2(x^4-6x^2+1)$
n＝5 の場合　$y=2(x^5-10x^3+5x)$
n＝6 の場合　$y=2(x^6-15x^4+15x^2-1)$
n＝7 の場合　$y=2(x^7-21x^5+35x^3-7x)$
・
・

微分方程式が線形だから右辺の 2 は省くことができて、結局、次となる。

[L(1)分割微分方程式におけるシンプルな表現の特殊解]

n＝1 の場合　$y=x$
n＝2 の場合　$y=x^2-1$
n＝3 の場合　$y=x^3-3x$
n＝4 の場合　$y=x^4-6x^2+1$
n＝5 の場合　$y=x^5-10x^3+5x$
n＝6 の場合　$y=x^6-15x^4+15x^2-1$
n＝7 の場合　$y=x^7-21x^5+35x^3-7x$
・
・

まったくシンプルな形になった！
冒頭の特殊解に比べ、項数が約半分になった。しかも多項式の形がチェビシェフ、エルミート、ルジャンドルの各多項式と同じような x^2単位の形になっている。（ついにこの形で出せた）

私はこれまで、L(1)分割多項式は重要であり、チェビシェフやエルミートなどの多項式とかなり近い位置にあるものとは分かっていたが、しかし x^2 単位か x 単位かの形の違いもあって「なぜなのか？」と思ってきた。
ここにきて、その疑問が氷解した。そういうカラクリだったのだ・・

冒頭で見た x 単位での特殊解は係数がパスカルの三角形となっていて、それはそれで味わいがある。シンプルな方もパスカルも、どちらの特殊解も興味深い。

ニワトリが先か卵が先か？（シンプルが先かパスカルが先か）

最後に備忘録の意味から、予想、構想、妄想、つぶやきを書いておく。
****

●負の方向の一般解を求めないといけない。ああなっているのか？

●L(1)でもξ(2)でも、多項式は直交多項式に違いないが、公式集にある積分での形で多項式間の直交性を示すの表示は難しくまだ得られていない。微分方程式を見つけてからすこし気になっている。∫K(x)LmLn=0 を示したいのだが。K(x)は何になるか？積分範囲は？

●ξ(2)分割微分方程式もnが負で成り立つ。しかしξ(2)では特殊な性質が出て、L(1)のように別の解が得られない。L(1)のように簡単に一般解を出せないのか。

ξ(2)分割微分方程式　$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x-(4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0$
は、<u>ガウスの超幾何微分方程式</u>である。

その一般解は知られているが、そんな抽象世界を通らないと一般解は得られないのか？

●L(3)分割の微分方程式はまだ出していないが、L(1)のものと似るのか？ξ(4)は？

●L(1)分割微分方程式の一般解（c_1とc_2は、任意の定数）

n=1 の場合　$y=c_1(x-1)+c_2(x+1)$

n=2 の場合　$y=c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)$

n=3 の場合　$y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$

n=4 の場合　$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$

n=5 の場合　$y=c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)$

n=6 の場合　$y=c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)$

n=7 の場合　$y=c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)$

$\qquad +c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)$

・
・

c_1とc_2の()内のそれぞれの一連の多項式は、符号を除いてその係数はパスカルの三角形から構成されている。これらの基本解を“パスカル解”と名付けると、L(1)分割微分方程式の<u>一般解は、二つのパスカル解から成る</u>、といえる。
****

2020.5.1　杉岡幹生

＜参考文献＞

「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Muray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳)
「すぐわかる微分方程式」(石村園子著、東京図書)
「微分方程式とその応用」(竹之内 脩著、サイエンス社)

改訂 Rev 1.01　[一般解を見出した過程]で、「負の値の場合は、有名多項式は全て不成立」の意味を書いていたが間違っていた。「チェビシェフ多項式のみ成立、他は不成立」の意味に訂正した。