＜ L(3) １４分割 ＞

今回は元の本道に戻ってL(3)の１４分割を求めたので報告したい。半年前からやっているL(3)分割シリーズの続きである。
一番近い所では、（その１４８）の１３分割の続きとなる。

L(3)は、L(s)ゼータの s=3 のもので、次のものである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 +1/13^3 -1/15^3 +\cdots=\pi^3/32$ -----①

まず結果を示す。以下の通りである。

＝＝＝

■L(3) １４分割

$A1 = 1 - 1/55^3 +1/57^3 -1/111^3 +1/113^3 -1/167^3 + \cdots =(\pi/56)^3\sin(27\pi/56)/\cos^3(27\pi/56)$

$A2 =1/3^3 - 1/53^3 +1/59^3 -1/109^3 +1/115^3 -1/165^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(25\pi/56)/\cos^3(25\pi/56)$

$A3 =1/5^3 - 1/51^3 +1/61^3 -1/107^3 +1/117^3 -1/163^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(23\pi/56)/\cos^3(23\pi/56)$

$A4 =1/7^3 - 1/49^3 +1/63^3 -1/105^3 +1/119^3 -1/161^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(21\pi/56)/\cos^3(21\pi/56)$

$A5 =1/9^3 - 1/47^3 +1/65^3 -1/103^3 +1/121^3 -1/159^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(19\pi/56)/\cos^3(19\pi/56)$

$A6 =1/11^3 - 1/45^3 +1/67^3 -1/101^3 +1/123^3 -1/157^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(17\pi/56)/\cos^3(17\pi/56)$

$A7 =1/13^3 - 1/43^3 +1/69^3 -1/99^3 +1/125^3 -1/155^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(15\pi/56)/\cos^3(15\pi/56)$

$A8 =1/15^3 - 1/41^3 +1/71^3 -1/97^3 +1/127^3 -1/153^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(13\pi/56)/\cos^3(13\pi/56)$

$A9 =1/17^3 - 1/39^3 +1/73^3 -1/95^3 +1/129^3 -1/151^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(11\pi/56)/\cos^3(11\pi/56)$

$A10=1/19^3 - 1/37^3 +1/75^3 -1/93^3 +1/131^3 -1/149^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(9\pi/56)/\cos^3(9\pi/56)$

$A11=1/21^3 - 1/35^3 +1/77^3 -1/91^3 +1/133^3 -1/147^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(7\pi/56)/\cos^3(7\pi/56)$

$A12=1/23^3 - 1/33^3 +1/79^3 -1/89^3 +1/135^3 -1/145^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(5\pi/56)/\cos^3(5\pi/56)$

$A13=1/25^3 - 1/31^3 +1/81^3 -1/87^3 +1/137^3 -1/143^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(3\pi/56)/\cos^3(3\pi/56)$

$A14=1/27^3 - 1/29^3 +1/83^3 -1/85^3 +1/139^3 -1/141^3 + \cdots=(\pi/56)^3\sin(\pi/56)/\cos^3(\pi/56)$

$A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6 +A7 -A8 +A9 -A10 +A11 -A12 +A13 -A14=L(3)=\pi^3/32$ である。

A1,-A2,A3,-A4,A5,-A6,A7,-A8,A9,-A10,A11,-A12,A13,-A14 がL(3)の１４分身である。

念のため、上の全式に対しExcelマクロで数値検証したが、級数の値と右辺値は一致した。

＝＝＝

導出方法は以下の通りである。

＝＝

[分身の導出方法]

上の分割級数(分身)の導出方法の概要を示す。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdot\cdot=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式②を使う。

$1/(1^2-x^2)^3+1/(3^2-x^2)^3+1/(5^2-x^2)^3+\cdot\cdot=(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)+\mathrm{Others}(x)$ ----②

右辺の Others(x)はＬ(3)に関係しない関数なので（じつはζ(2)とＬ(1)に関係)､”Others(x)”とした。ここで Others(x)は次のものである。

$\mathrm{Others}(x)=-(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2)+(3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$

注記：Others(x)のはじめのπ^2の項がζ(2)に関係し、二つ目のπの項がＬ(1)に関係している。

さて、次のように上記②のｘに特定の値を代入することでＬ(3)の分身が次々に求まっていく。

②のｘに{28-(2n-1)}/28 を代入すると、An が得られる。ここでｎは１から 14 の整数。
例えばｎ=3 として②のｘに 23/28 を代入すると、A3 が得られる。

（注記）②の左辺級数からＬ(1)とζ(2)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺のＬ(1)とζ(2)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単にＬ(3)の分割級数（分身）を求めることができる。Ｌ(5)，Ｌ(7)・・でも類似的に同様にできる。

＝＝

このように１４分身が求まった。

今回のＬ(3)の１４分身は、（その９４）で見たＬ(1)の１４分身と形が全く同じであることにも注目いただきたい。L(1)から L(3)に移っても、その美しい秩序は保存されるのである。

ゼータ分割の領域は美しい構造で溢れている。ゼータの香りの漂う公式から派生したその地下空間は広く、洞窟が縦横に走っているようである。あっちの洞窟を覗いては元の洞窟に戻り、こっちを覗いてはまた元の道に戻るということを繰り返している状態である。

2020.4.20　杉岡幹生