＜ゼータ分割は正規拡大である － 例Ｌ(1)６分割 －＞

前回の（その１５２）Ｌ(1)４分割の続きで、今回は「Ｌ(1)６分割は正規拡大である」ということを示す。

証明の本質は４分割と同じだが、４分割と６分割ではすこし様相が違う。４分割では最小多項式が一つであるが、６分割では最小多項式が二つ存在する。そしてその二つともが正規拡大となる。

なお、（その１５２）は証明が不完全だったので修正し改訂版 rev1.01 を佐藤氏にアップしてもらったので、見ていただければ幸いである。

まず今現在、何をやっているかを確認しておこう。テーマを掲げておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜テーマ＞

ゼータの分身の（π^nを除いた）値(特殊値)は、ある一連の多項式から成る方程式の解として得られる。その値は、その方程式の係数に対して加減乗除および冪(べき)根を求める計算を有限回実行して得られる。つまり、方程式を代数的に解いて得られるものとなる。

さらにその解（分身の値）には、冪根は冪根でも平方根√しか出てこない。($\sqrt[3]{\ }$や$\sqrt[7]{\ }$とかは出ない！）

例えば、Ｌ(1)４分身の値が

$1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}$,　$1-\sqrt{2}-\sqrt{4-2\sqrt{2}}$,　$1-\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}$,　$1+\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

となるように。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

この辺を調べている。他にも、超幾何関数の方面とか行列方面などいくつもの大洞窟があるが、いま上記の方程式方面の洞窟を探索している状況である。

さて、Ｌ(1)の６分割を見ていく。Ｌ(1)とは、もちろん次のものである。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13-1/15+1/17-1/19+\cdots=\pi/4$

Ｌ(1)６分割を示すと、次となる。（その１０２）から抜粋。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■Ｌ(1)６分割

$A1=1-1/23+1/25-1/47+1/49-1/71+\cdots=(\pi/24)\tan(11\pi/24)$

$A2=1/3-1/21+1/27-1/45+1/51-1/69+\cdots=(\pi/24)\tan(9\pi/24)$

$A3=1/5-1/19+1/29-1/43+1/53-1/67+\cdots=(\pi/24)\tan(7\pi/24)$

$A4=1/7-1/17+1/31-1/41+1/55-1/65+\cdots=(\pi/24)\tan(5\pi/24)$

$A5=1/9-1/15+1/33-1/39+1/57-1/63+\cdots=(\pi/24)\tan(3\pi/24)$

$A6=1/11-1/13+1/35-1/37+1/59-1/61+\cdots=(\pi/24)\tan(\pi/24)$

$A1-A2+A3-A4+A5-A6=L(1)$ である。A1, −A2, A3, −A4, A5, −A6 がＬ(1)６分身である。

tan の値は以下の通り。

$\tan(11\pi/24) = 2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$
$\tan(9\pi/24) = 1+\sqrt{2}$
$\tan(7\pi/24) = 2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$
$\tan(5\pi/24) = -(2-\sqrt{3})+2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$
$\tan(3\pi/24) = -1+\sqrt{2}$
$\tan(\pi/24) = -(2+\sqrt{3})+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

“A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6”の計算で√がきれいに消え、A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6＝$\pi/4$となる様を味わっていただきたい。

まず分身の値を解にもつ方程式を考察しよう。
（その１０２）でＬ(1)６分身 A1, -A2, A3, -A4, A5, -A6 の（($\pi/24$) を除いた）値を解にもつ６次方程式を示したが、次のものである。

$$x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0 \qquad \text{-------①}$$

この六つの解 x1, x2, x3, x4, x5, x6 は、次となる。
$x1=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$
$x2=-1-\sqrt{2}$
$x3=2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$
$x4=2-\sqrt{3}-2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$
$x5=-1+\sqrt{2}$
$x6=2+\sqrt{3}-2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

これらが、それぞれＬ(1)６分身 A1, -A2, A3, -A4, A5, -A6 の“$\pi/24$ を除いた値”となっていることは上記Ｌ(1)６分割の tan() の値を見れば容易にわかる。

①の左辺は次のように因数分解できる。

$$x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=(x^4 -8x^3 +2x^2 +8x +1)(x^2 +2x -1) \qquad \text{------②}$$

ここで、
$p(x)=x^4 -8x^3 +2x^2 +8x +1$ -----③
$g(x)=x^2 +2x -1$ ------④
とする。

p(x)は、解 x1 の有理数体Ｑ上の４次の最小多項式になっている（x3, x4, x6 を考えてもよいが）。
また g(x)は、解 x2 の有理数体Ｑ上の２次の最小多項式になっている（x5 を考えてもよいが）。

このように六つの解は４個（x1, x3, x4x, x6）と２個(x2, x5)で別々のグループを構成するのである。ここが、４分割と違っている点である。

ここで最小多項式の定義を再掲しよう。(「数学ガール／ガロア理論」(結城浩著、SB クリエイティブ) から引用。若干補足した)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜最小多項式＞

複素数 θ に対し、以下の条件を満たす有理数係数の n 次多項式 p(x) が存在するとき、多項式 p(x) を、数 θ の有理数体Ｑ上の最小多項式という。

・p(x) は θ を根に持つ。
・p(x) の n 次の係数は 1 に等しい。
・θ を根に持つ、n 次未満の有理数係数の多項式は存在しない。

またこのとき、体の拡大Ｑ(θ)/ＱをＱ上の線形空間（ベクトル空間）と考えると、

$\{1, \ \theta, \ \theta^2, \theta^3, ・・・, \theta^{n-1}\}$

は、基底となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

基底やベクトル空間に関しては、(その１４３) あたりを参照されたい。

L(1) ６分身の各グループの多項式は、根との関係において上記の最小多項式の定義を満たしている。

つまり「③の多項式 $p(x)=x^4 -8x^3 +2x^2 +8x +1$ は、$x1=2+\sqrt{3} +2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ を根に持つ。p(x) の 4 次の係数は 1 に等しい。x1 を根に持つ 4 次未満の有理数係数の多項式は存在しない。」となっている。最後の “x1 を根に持つ・・” は手計算で簡単に確認できる。

また、上のことは、もう一つの④の多項式 g(x) についても成り立っている。
つまり「$g(x)=x^2 +2x -1$ は、$x2=-1-\sqrt{2}$ を根に持つ。g(x) の 2 次の係数は 1 に等しい。X2 を根に持つ 2 次未満の有理数係数の多項式は存在しない。」となっている。最後の “x2 を根に持つ・・” は明らかである。

さらに、③の根の一つ $x1=2+\sqrt{3} +2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ を、有理数体Ｑに添加した体Ｑ(x1) を考えよう。体Ｑ(x1) の数は、“$p + q(2+\sqrt{3} +2\sqrt{(2+\sqrt{3})})$“という数の集合に属する。ここで、p,q は有理数。この体の拡大Ｑ(x1)/Ｑは正規拡大になっている。

また、④の根の一つ $x2=-1-\sqrt{2}$ を、有理数体Ｑに添加した体Ｑ(x2) を考えよう。
この体Ｑ(x2) の数は、“$p + q(-1-\sqrt{2})$“という数の集合の 2 次体Ｑ($\sqrt{2}$) に属する。ここで、p,q は有理数。この体の拡大Ｑ(x2)/Ｑも正規拡大になっている。

正規拡大の定義を再掲しよう。(「数学ガール／ガロア理論」(結城浩著、SB クリエイティブ) から引用。)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜正規拡大とは＞

一般に、体拡大Ｌ/Ｋで、次の条件を満たすものを正規拡大と呼ぶ。

体Ｌに属している任意の数αに対して、「αのＫ上の最小多項式」は、Ｌ上で１次式の積に因数分解する。

ただし、ここでは拡大次数が有限の体拡大のみを考えている。
正規拡大の定義は、こんなふうに言い換えることもできる。

拡大体に、最小多項式の根が一つ属しているならば、他のすべての根も必ずその拡大体に属しているとしよう。そのような体の拡大を正規拡大と呼ぶ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

前の定義でも後ろの定義でもどちらでもよいが、これが正規拡大の定義である。

正規拡大かどうかを証明する準備として、まず、多項式 $p(x)=x^4-8x^3+2x^2+8x+1$ の四根全部が体 $Q(x1)$ に属するのかを調べよう。
つまり $p(x)$ の根の一つ $x1=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ について、体 $Q(x1)$ の基底を計算で求めた $\{1,\ x1,\ x1^2,\ x1^3\}$。
計算の結果、$Q(x1)$ の四つの基底は $\{1,\ \sqrt{3},\ \sqrt{(2+\sqrt{3})},\ \sqrt{3}\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}$ と求まった。

①の四つの解 x1, x3, x4, x6 は次の通り。

$x1=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

$x3=2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$

$x4=2-\sqrt{3}-2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$

$x6=2+\sqrt{3}-2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

これら全てが“$p+q\sqrt{3}+r\sqrt{(2+\sqrt{3})}+\omega\sqrt{3}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$”という数の世界（$Q(x1)$ の世界、ベクトル空間）に属していることを以下の通り確認できた(p, q, r, ω は有理数)。

解 x3 では、$x3=2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})}=p+q\sqrt{3}+r\sqrt{(2+\sqrt{3})}+\omega\sqrt{3}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ を満たす有理数 p, q, r, ω が存在する。その答えは、$p=2, q=-1, r=4, \omega=-2$ となる。

他の解 x4、x6, x1 も同様に簡単に求まる。

X4 は $p=2, q=-1, r=-4, \omega=2$ となる。

X6 は $p=2, q=1, r=-2, \omega=0$ となる。

x1 は $p=2, q=1, r=2, \omega=0$ となる。

まとめる。次のように基底で表現できる。あえて 0 も入れた。

$x1=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}+0\sqrt{3}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

$x3=2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}+4\sqrt{(2+\sqrt{3})}-2\sqrt{3}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

$x4=2-\sqrt{3}-2\sqrt{(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}-4\sqrt{(2+\sqrt{3})}+2\sqrt{3}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

$x6=2+\sqrt{3}-2\sqrt{(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}-2\sqrt{(2+\sqrt{3})}+0\sqrt{3}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

これより、体Ｑ(x1)に含まれる一つの数 $x1=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ に着目した場合、x1 を根に持つ最小多項式 $p(x)=x^4-8x^3+2x^2+8x+1$ の四根全部が体Ｑ(x1)に属することが分かった（基底で表現できたから）。

次に、もう一つのグループを考えよう。

多項式 $g(x)=x^2+2x-1$ の二根ともに体Ｑ(x2)に属するのかを調べよう。p(x)の根の一つ $x2=-1-\sqrt{2}$ について体Ｑ(x2)の基底を求めると ｛1, $\sqrt{2}$｝ と求まった。

よって、二つの根 $x2=-1-\sqrt{2}$、$x5=-1+\sqrt{2}$ ともに、“$a+b\sqrt{2}$”という数の世界（Ｑ(x2)＝Ｑ($\sqrt{2}$)の世界、ベクトル空間）に属していることは明らかである。(a,b は有理数)。

以上より、p(x)、g(x)の各多項式の根で作られる各拡大体に、各多項式の根すべてが属していることが確認できた。

以上。

上記の考察を準備として、L(1)６分割での体の拡大Ｑ(x1)/Ｑと拡大体Ｑ(x2)/Ｑが、正規拡大になっていることを証明する。すなわち、体Ｑ(x1)や体Ｑ(x2)における任意の数の最小多項式を考えた場合、その全ての根がそれぞれの体に含まれることを示せば証明が完了となる。

以下にそれを示す。

＝＝＝

＜L(1)６分割が正規拡大になっていることの証明＞

L(1)６分割での各グループが、それぞれ正規拡大になっていることを、グループに分けて証明する。

まずL(1)６分身 A1, −A2, A3, −A4, A5, −A6 の値に対応する①の解 x1,x2,x3,x4,x5,x6 は次の通りである。

$x1=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$
$x2=-1-\sqrt{2}$
$x3=2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$
$x4=2-\sqrt{3}-2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$
$x5=-1+\sqrt{2}$
$x6=2+\sqrt{3}-2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

体拡大Ｑ(x1)/Ｑの方を先に証明し、あとで、体拡大Ｑ(x2)/Ｑの方を証明する。まず体拡大Ｑ(x1)/Ｑの方から。

[体拡大Ｑ(x1)/Ｑが正規拡大であることの証明]

有理数体Ｑに $x1=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ を添加した体Ｑ(x1)を考えよう。この体の拡大Ｑ(x1)/Ｑが正規拡大になっていることを示していく。

このグループでは、次の四解が関係する。

$x1=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$
$x3=2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$
$x4=2-\sqrt{3}-2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$
$x6=2+\sqrt{3}-2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

さて、体Q(x1)上の任意の数αは、$\alpha=p+q(2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})})$ ----⑤
と表される。ここで、p, qは有理数である（有理数体Qに属する）。
⑤より、

$\alpha-p-q(2+\sqrt{3})=2q\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

両辺を２乗して、変形して次を得る。
$(\alpha-p)^2-4(\alpha-p)q-q^2=2(\alpha-p)q\sqrt{3}$

両辺をq^2で割ると、
$((\alpha-p)/q)^2-4(\alpha-p)/q-1=2((\alpha-p)/q)\sqrt{3}$

ここで、$(\alpha-p)/q=A$とおくと、次となる。
$A^2-4A-1=2\sqrt{3}\cdot A$

両辺を２乗する。
$(A^2-4A-1)^2=(2\sqrt{3}\cdot A)^2$ -------⑥

変形していこう。
$(A^2-4A-1)^2-(2A\sqrt{3})^2=0$
$\{(A^2-4A-1)-2\sqrt{3}\cdot A\}\{(A^2-4A-1)+2\sqrt{3}\cdot A\}=0$
$\{A^2-2(2+\sqrt{3})A-1\}\{A^2-2(2-\sqrt{3})A-1\}=0$

よって、$A=2+\sqrt{3}\pm2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$、$2-\sqrt{3}\pm2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ と四解が求まった。
$(\alpha-p)/q=A$であるから、$\alpha=$・・で表すと、次となる。

$\alpha=p+q(2+\sqrt{3}\pm2\sqrt{(2+\sqrt{3})})$、$p+q(2-\sqrt{3}\pm2\sqrt{(2-\sqrt{3})})$

さて⑥は次のようにも変形できる。
$A^4-8A^3+2A^2+8A+1=0$ -----⑦

$(\alpha-p)/q=A$だから、⑦より次のαの４次方程式を得る。（⑧の形のままでおく）

$((\alpha-p)/q)^4-8((\alpha-p)/q)^3+2((\alpha-p)/q)^2+8((\alpha-p)/q)+1=0$ ------⑧

式変形の過程から、この左辺がαの最小多項式になっていることは容易にわかる。

⑧の四解を$\alpha1$、$\alpha2$、$\alpha3$、$\alpha4$とすると、それぞれ次のようになる。

$\alpha_1 = p + q(2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}})$ ----⑨-1
$\alpha_2 = p + q(2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{2-\sqrt{3}})$ ----⑨-2
$\alpha_3 = p + q(2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{2-\sqrt{3}})$ ----⑨-3
$\alpha_4 = p + q(2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2+\sqrt{3}})$ ----⑨-4

⑤から$\alpha = \alpha_1$であることに注意。これらの数(解)は全て体Q(x1)つまり体$Q(2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}})$に含まれる数となる。それは、この証明の前の準備で示した<u>四つの基底</u> $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}\}$ を使った次の関係から分かる。

****

$x_1 = 2+\sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 0\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$x_3 = 2-\sqrt{3} + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} + 4\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$x_4 = 2-\sqrt{3} - 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} - 4\sqrt{2+\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$x_6 = 2+\sqrt{3} - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 0\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

****

つまり　このx3またはx4から、

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \text{----⑩}$$

と分かる。⑩を使うと、⑨-1～⑨-4は、次のように<u>四つの基底</u> $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}\}$ で表現できる。あえて0も入れた。

$\alpha_1 = p + q(2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 0\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}})$
$\alpha_2 = p + q(2 - \sqrt{3} + 4\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}})$
$\alpha_3 = p + q(2 - \sqrt{3} - 4\sqrt{2+\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}})$
$\alpha_4 = p + q(2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 0\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}})$

体Q(x1)の四つの基底でα_1～α_4が表現できた。

これはα_1～α_4がすべて体Q(x1)に属する数であることを示している。すなわち、体Q(x1)の<u>任意の数α</u>を根にもつ（４次の）最小多項式の四根全部が体Q(x1)に属する数になることが分かった。

以上より、体の拡大Q(x1)/Qは、正規拡大になっていることが分かった。

次に体拡大Q(x2)/Qを考える。

[体拡大Q(x2)/Qが正規拡大であることの証明]

有理数体Qに$x_2 = -1-\sqrt{2}$を添加した体Q(x2)を考える。この体拡大Q(x2)/Qが正規拡大になっていることを示す。このグループでは、次の二つの解が関係する。

$x_2 = -1-\sqrt{2}$
$x_5 = -1+\sqrt{2}$

さて、$Q(x_2) = Q(\sqrt{2})$の<u>任意の数</u>βは、$\beta = a + b\sqrt{2}$ ----⑪

と表される。ここで、a，b は有理数。

⑪より、$\beta - a = b\sqrt{2}$

両辺を２乗して、変形していく。

$(\beta - a)^2 - (b\sqrt{2})^2 = 0$ -----⑫

$\beta^2 - 2b\beta + a^2 - 2b^2 = 0$ ----⑬

式変形の過程から、⑬の左辺がβの最小多項式になっていることは明らかである。

⑫から、$\{\beta - a - b\sqrt{2}\}\{\beta - a + b\sqrt{2}\} = 0$

よって、$\beta = a + b\sqrt{2}$、$a - b\sqrt{2}$

この２解の姿から、これは⑬のβの最小多項式$\beta^2 - 2b\beta + a^2 - 2b^2$の根すべてがＱ(x2)＝Ｑ($\sqrt{2}$)に属する数であることが分かる。これにより体Ｑ(x2)の任意の数βを根にもつ（２次の）最小多項式の二根ともが体Ｑ(x2)つまりＱ($\sqrt{2}$)に属する数になることが分かった。

以上より、体の拡大Ｑ(x2)／Ｑは、正規拡大になっていることが分かった。

以上の結果から、Ｑ(x1)／ＱもＱ(x2)／Ｑも、ともに正規拡大となっていることが分かった。

（証明終わり）

＝＝

このようにＬ(1)６分割に関係する２グループの体拡大は、ともに正規拡大になっていることが分かった。

今回のことから、Ｌ(1)分身を生み出す方程式は、正規拡大の最小多項式に因数分解されるといえそうである。そして、これは当然ζ(2)やＬ(3)・・でも成り立っているはずである。

ゼータはどこまでもきれいである。

2020/4/5　杉岡幹生

（参考文献）

「数学ガール／ガロア理論」（結城浩著、SB クリエイティブ）