＜「ゼータ分身は、有理数への加減乗除と開平の繰り返しでできる実数になる」の例２＞

今回は、前回の（その１５０）のＬ(3)での類似をＬ(1)で行う。タイトルの表現は若干変えたが、前回のものと同じである。

つまり、ｎ個に分割されたＬ(1)ゼータの分身の（πを除いた）値は、有理数に加減乗除と平方根を開くという操作を繰り返し行って得られる数になるということを示したい。

Ｌ(1)とは、もちろん次のものである。

Ｌ(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +1/9 −1/11 +1/13 −1/15 +1/17 −1/19 +・・・＝π/4

今回は次の４分割とともに２分割も見ることにする。２分割、４分割の順に考察する。

（その１１）から（表現を少し変えて）抜粋。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■Ｌ(1)２分割

A1＝ 1 −1/7 +1/9 −1/15 + 1/17 −1/23 + ・・ ＝(π/8)tan(3π/8)

A2＝1/3 −1/5 +1/11 −1/13 + 1/19 −1/21 +・・＝(π/8)tan(π/8)

A1 −A2＝π/4＝Ｌ(1)である。A1, −A2 がＬ(1)２分身である。右辺の tan()の値は次の通り。

tan(3π/8)＝1 +√2、tan(π/8)＝−1 +√2

■Ｌ(1)４分割

B1＝ 1 −1/15 +1/17 −1/31 +1/33 −1/47 +・・ ＝(π/16)tan(7π/16)

B2＝1/3 −1/13 +1/19 −1/29 +1/35 −1/45 +・・＝(π/16)tan(5π/16)

B3＝1/5 −1/11 +1/21 −1/27 +1/37 −1/43 +・・＝(π/16)tan(3π/16)

B4＝1/7 −1/9 +1/23 −1/25 +1/39 −1/41 +・・ ＝(π/16)tan(π/16)

B1 −B2 +B3 −B4＝π/4＝Ｌ(1) である。B1, −B2, B3, −B4 がＬ(1)４分身である。
右辺の tan()の値は次の通り。

tan(7π/16)＝1 +√2 +√(4+2√2)、tan(5π/16)＝−1 +√2 +√(4−2√2)

tan(3π/16)＝1 −√2 +√(4−2√2)、tan(π/16) ＝−1 −√2 +√(4+2√2)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

２分割では、A1 −A2＝Ｌ(1)＝π/4 となって、うまいこと√が消える。
４分割も B1 −B2 +B3 −B4 の計算で√がきれいに消えて、B1 −B2 +B3 −B4＝Ｌ(1)＝π/4 になるという味わい深い形となっている。きれいな対称性である！

このように２分身も４分身も、その tan()の値は、有理数への加減乗除と開平(√)の繰り返しでできる実数になる。これまでと同様に、分身の値は（π/○）を除く tan()だけの値とする（本質的な考察にはそれで十分）。

では、L(1) ２分割から見ていこう。

２分身 A1, −A2 の値を解にもつ２次方程式は、（その９６）で見た通り、次のものである。

$x^2 -2x -1=0$　　------①

この二解は $x=1\pm\sqrt{2}$ である。①は２次方程式だから、解の公式から、その解は当然、有理数への加減乗除と開平の操作(√)から成る数となる。つまり、広く言えばその二解（A1, −A2 の値）は「有理数に加減乗除と平方根を開くという操作を繰り返し行って得られる数」の集合に含まれる数となる。

次に、L(1) ４分割を見てみよう。
（その９７）で L(1) ４分身 B1, −B2 , B3, −B4 の値を解にもつ４次方程式を示したが、次のものである。

$x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$　------②

この四解は次となる。
$x=1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}},\ 1-\sqrt{2}-\sqrt{4-2\sqrt{2}},\ 1-\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}},\ 1+\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

４分身が全て実数であるから、当然ながらこの四解は全て実数である。

②は、有理数体Ｑに√2 を添加して拡大した２次体Ｑ(√2)上で、次のように因数分解できる。

$\{x^2-(2+2\sqrt{2})x-1\}\{x^2-(2-2\sqrt{2})x-1\}=0$　-----③

p, q を有理数とした場合、Ｑ(√2)は $p+q\sqrt{2}$ という数の集合だから、上記③の各２次方程式の係数はそのような数で構成されている。
このようにＱ(√2)上で②は有理数と√2 から成る実数を係数に持つ２次方程式に因数分解された。

さらに、この有理数と√2 から成る実数を係数に持つ③の各２次方程式を、２次方程式の解の公式（公式には√がある！）を用いて解くことで、その解は、有理数への加減乗除と開平（√）の繰り返しでできる数になる。すなわち最終的に得られる②の四解は、「有理数に加減乗除と平方根を開く(√)という操作を繰り返し行って得られる実数」の集合に含まれる数となる。

このようにL(1)の分身たちの値（π を除いたもの）には√ばっかり出てくる。$\sqrt[5]{}$ とか $\sqrt[11]{}$ とかが出てくることはない。

きれいな構造の上にL(1)ができているから、このようなことになる。

2020/3/20　杉岡幹生

（参考文献）
「数学ガール／ガロア理論」（結城浩著、SB クリエイティブ）
「円の数学」（小林昭七著、裳華房）