＜「ゼータ分身は、√と有理数で構成される実数になる」の例１ ＞

今回は、（その１４９）で述べた「ゼータ分身は、拡大体上での２次方程式の解に帰着される」ということを例で示したい。それは言い換えると、「分身は、√と有理数で構成される数（実数）になる」ということである。

まず手計算で確認したＬ(3)から示す。今回から数回に分けて示していく。

（その１４９）での次の辺りを例で見たいのである。

****

・・・

それは結局は、ゼータ分割では、拡大体における２次方程式をくり返し解くことに帰着することを意味する。本質的な形で３次方程式、４次方程式・・を解くことはない。

Ｌ(1)、ζ(2)、Ｌ(3)のｎ分割での固有方程式は、ｎ次数方程式(多項式)となるが、拡大体における因数分解ができ、結局は拡大体での２次方程式を解くことに帰着される（奇数分割では、有理数を解にもつ一次方程式も出るが、それは本質的な分割ではないので除外して考える)。

****

上は、ゼータの分身たちは、ｎ乗根でも単純な２乗根の√ばかりで表現されることを意味している。すなわち「分身を表す式には、√しか出ない。^{5}√とか ^{7}√とかは出ない」ということである。

√しか出ないのは、これまで多くの例で見てきたが、例えば今回は次のＬ(3) ４分割の例を見てみよう。

（その１２７）から若干略して抜粋。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■Ｌ(3) ４分割

B1＝ $1 -1/15^3 +1/17^3 -1/31^3 +1/33^3 -1/47^3 + \cdots = (\pi/16)^3\sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16)$

B2＝$1/3^3 -1/13^3 +1/19^3 -1/29^3 +1/35^3 -1/45^3 + \cdots = (\pi/16)^3\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16)$

B3＝$1/5^3 -1/11^3 +1/21^3 -1/27^3 +1/37^3 -1/43^3 + \cdots = (\pi/16)^3\sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16)$

B4＝$1/7^3 -1/9^3 +1/23^3 -1/25^3 +1/39^3 -1/41^3 + \cdots = (\pi/16)^3\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16)$

B1 -B2 +B3 -B4＝L(3)＝$\pi^3/32$ である。B1, -B2, B3, -B4 がＬ(3)の４分身である。

B1⇒ $\sin(7\pi/16)/\cos^3(7\pi/16) = 32 +24\sqrt{2} +16\sqrt{2+\sqrt{2}} +14\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

B2⇒ $\sin(5\pi/16)/\cos^3(5\pi/16) = -32 +24\sqrt{2} -16\sqrt{2-\sqrt{2}} +14\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

B3⇒ $\sin(3\pi/16)/\cos^3(3\pi/16) = 32 -24\sqrt{2} -16\sqrt{2-\sqrt{2}} +14\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

B4⇒ $\sin(\pi/16)/\cos^3(\pi/16) = -32 -24\sqrt{2} +16\sqrt{2+\sqrt{2}} +14\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように、Ｌ(3) ４分身（$(\pi/16)^3$を除く本質的な部分）は、√と有理数で構成される実数となる。

B1 -B2 +B3 -B4 の計算で√が全てきれいに消えて、B1 -B2 +B3 -B4＝$\pi^3/32$ になるという非常に味わい深い形となっていることを確認いただきたい。見事な対称性である！

さて、（その１２７）で上記Ｌ(3)４分身を解にもつ４次方程式（固有方程式）を示したが、次のものである。

$$x^4 -128x^3 -544x^2 +512x +128=0 \quad \text{-----①}$$

これが上記Ｌ(3)４分身（の$(\pi/16)^3$を除く本質的な部分）を解にもつ４次方程式である。４分身が全て実数であるから、当然ながら①の４つの解は全て実数である。

①は、有理数体Ｑに$\sqrt{2}$を添加して拡大した２次体Ｑ($\sqrt{2}$)上で、次のように因数分解できる。

$$\{x^2 -(64-48\sqrt{2})x -16+8\sqrt{2}\}\{x^2 -(64+48\sqrt{2})x -16-8\sqrt{2}\}=0 \quad \text{-----②}$$

p，q を有理数とした場合、Ｑ($\sqrt{2}$)は $p+q\sqrt{2}$ という数の集合だから、上記②の各２次方程式の係数はそのような数で構成されている。

このように拡大体Ｑ($\sqrt{2}$)上で①は、有理数と$\sqrt{2}$から成る実数を係数に持つ２次方程式に因数分解された。

さらに、この有理数と$\sqrt{2}$から成る実数を係数に持つ２次方程式を、２次方程式の解の公式（公式には√がある！）を用いて解くことで、やはり有理数と√でのみ構成される解（実数解）が得られる。

これと同類のことが、任意のゼータ分割（どの次元の方程式でも）起こることになる。

2n の偶数次元ではもちろん n 個の２次方程式に因数分解される。2n+1 奇数次元でも、１個の有理数解をもつ一つの１次方程式を除いて（それは意味のない偽分身）、2n の偶数次元の方程式となり同様に n 個の２次方程式に因数分解される。

Ｌ(χ，ｓ)ゼータの分身を解にもつ方程式は、どんなものでも√と有理数から成る実数を係数にもつ２次方程式に因数分解される。そして、それを２次方程式の解の公式を用いて解くことになるので、その解（分身）には２乗根の√しか出てこないのである。

すなわち、L(χ,s)ゼータ分身は、√と有理数で構成される実数になる。

2020/3/14　杉岡幹生

（参考文献）

「数学ガール／ガロア理論」（結城浩著、SB クリエイティブ）