＜ 予想、アイディア ＞ rev1.01

今回は、ゼータ分割とその周辺に関する種々の予想やアイディアをスケッチしておきたい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●ゼータの分割（分身を求める）は、体の拡大におけるベクトル空間（線形空間）での次元と関係するはずである。有理数体Ｑに√2 を添加して、２次拡大体Ｑ(√2)ができるのに似ている。

L(1)２分割

A1＝ 1 -1/7 +1/9 -1/15 + 1/17 -1/23 +・・ ＝(π/8)tan(3π/8)

A2＝1/3 -1/5 +1/11 -1/13 + 1/19 -1/21 +・・＝(π/8)tan(π/8)

A1,-A2 が２分身。A1 -A2＝π/4＝L(1)。tan()の値は右の通り。tan(3π/8)＝1 +√2、tan(π/8)＝-1 +√2

●しかも分割は、拡大体Ｑ()の任意の数αと共役な数はすべてその拡大体Ｑ()に属しているという特別な拡大、正規拡大になっているはずである。つまり「拡大体に、最小多項式の根が一つ属しているならば、他の全ての根も必ずその拡大体に属している」となっているはずである。

●ゼータ分割の問題は、ギリシャの三大作図問題の一つ、角の 3 等分問題に似ている。

角の 3 等分問題（与えられた角を定規とコンパスだけ使って３等分せよ）は、定規とコンパスだけでは作図不可能ということで決着している。そのことは、求めたい３等分の数は「有理数に加減乗除と平方根を開くという操作を繰り返して得られる数ではない」と言い換えることもできる。

例えば、2 + √3/2 +√√ （√(7/2) +1） とかこんな数にはならないのである。

一方、ゼータの分身たちは、そんな数になる。つまり、すべて加減乗除と√で表現されるはずである。例えば、以下の tan()の値を見てほしい。

L(1)４分割

C1＝ 1 -1/15 +1/17 -1/31 +1/33 -1/47 +・・ ＝(π/16)tan(7π/16)

C2＝1/3 -1/13 +1/19 -1/29 +1/35 -1/45 +・・＝(π/16)tan(5π/16)

C3＝1/5 -1/11 +1/21 -1/27 +1/37 -1/43 +・・＝(π/16)tan(3π/16)

C4＝1/7 -1/9 +1/23 -1/25 +1/39 -1/41 +・・ ＝(π/16)tan(π/16)

C1,-C2,C3,-C4 が４分身。C1 -C2 +C3 -C4＝π/4＝L(1) である。tan()の値は、以下の通り。

tan(7π/16)＝1 +√2 +√(4+2√2)、tan(5π/16)＝-1 +√2 +√(4-2√2)

tan(3π/16)＝1 -√2 +√(4-2√2)、tan(π/16) ＝-1 -√2 +√(4+2√2)

上の tan()の値は、ある対称性から成っていることを見て取っていただきたい。

　またＬ(1)８分割での√で表現された数は（その８８）のようになる。８分割も素晴らしい対称性で表現された数となる。８分割でも√しか出てこない。３乗根 $^3\sqrt{}$ とか４乗根 $^4\sqrt{}$ などは出ない。ゼータ分割では、平方根（２乗根）√しか出ない。

　それは結局は、ゼータ分割では、拡大体における２次方程式をくり返し解くことに帰着することを意味する。本質的な形で３次方程式、４次方程式・・を解くことはない。

Ｌ(1)、ζ(2)、Ｌ(3)のｎ分割での固有方程式は、ｎ次数方程式(多項式)となるが、拡大体における因数分解ができ、結局は拡大体での２次方程式を解くことに帰着される（奇数分割では、有理数を解にもつ一次方程式も出るが、それは本質的な分割ではないので除外して考える)。

そのことはまた上記方程式を固有方程式として持つ実-双対角対称行列（エルミート行列）が、延々と単純に２次正方行列をフラクタル的に（相似的に）拡大していくことにも関係する。その２次正方行列が、２次方程式に対応する。

　このようにゼータは単純なのである。単細胞生物である。

　なお、角の 3 等分問題は、1837 年にワンツェル（1814-1848）により否定的に解決された。体の概念ができてきた１９世紀になってようやく解決されたといえる。ワンツェルは、角の 3 等分問題とともに立方体積問題も解いており、たった一人でギリシャ以来２千年以上解けなかった３問題のうち二つを解いてしまったのである！

　今、ワンツェルは、ガロア(1811-1832)と同時代を生きた人だと気づいた。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2020/3/8　杉岡幹生

（参考文献）

「数学ガール／ガロア理論」（結城浩著、SB クリエイティブ）

「円の数学」（小林昭七著、裳華房）

「数学入門辞典」（青本・上野・加藤 他著、岩波書店）

Rev1.01　2020/3/14　「有理数体Ｑ(√2)に√2 を・・」を「有理数体Ｑに√2 を・・」に修正。