＜ L(3)１３分割 ＞

今回は、いったん元の本道に戻ってL(3)の１３分割を求めたので報告したい。昨年１０月ごろのL(3)分割シリーズの続きである。

ただし１３分割は結局は１２分割となってしまうことを最後に述べた。それは（その１３２）の１２分割とはまた異なる１２分割である。

L(3)は、L(s)ゼータの s=3 のもので、次のものである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 +1/13^3 -1/15^3 +\cdots=\pi^3/32$ -----①

では、まず結果を示す。以下の通りである。

==

■L(3)１３分割

$A1 = 1 - 1/51^3 +1/53^3 -1/103^3 +1/105^3 -1/155^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(25\pi/52)/\cos^3(25\pi/52)$

$A2 = 1/3^3 - 1/49^3 +1/55^3 -1/101^3 +1/107^3 -1/153^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(23\pi/52)/\cos^3(23\pi/52)$

$A3 = 1/5^3 - 1/47^3 +1/57^3 -1/99^3 +1/109^3 -1/151^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(21\pi/52)/\cos^3(21\pi/52)$

$A4 = 1/7^3 - 1/45^3 +1/59^3 -1/97^3 +1/111^3 -1/149^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(19\pi/52)/\cos^3(19\pi/52)$

$A5 = 1/9^3 - 1/43^3 +1/61^3 -1/95^3 +1/113^3 -1/147^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(17\pi/52)/\cos^3(17\pi/52)$

$A6 = 1/11^3 - 1/41^3 +1/63^3 -1/93^3 +1/115^3 -1/145^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(15\pi/52)/\cos^3(15\pi/52)$

$A7 = 1/13^3 - 1/39^3 +1/65^3 -1/91^3 +1/117^3 -1/143^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(13\pi/52)/\cos^3(13\pi/52)$

$A8 = 1/15^3 - 1/37^3 +1/67^3 -1/89^3 +1/119^3 -1/141^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(11\pi/52)/\cos^3(11\pi/52)$

$A9 = 1/17^3 - 1/35^3 +1/69^3 -1/87^3 +1/121^3 -1/139^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(9\pi/52)/\cos^3(9\pi/52)$

$A10 = 1/19^3 - 1/33^3 +1/71^3 -1/85^3 +1/123^3 -1/137^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(7\pi/52)/\cos^3(7\pi/52)$

$A11 = 1/21^3 - 1/31^3 +1/73^3 -1/83^3 +1/125^3 -1/135^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(5\pi/52)/\cos^3(5\pi/52)$

$A12 = 1/23^3 - 1/29^3 +1/75^3 -1/81^3 +1/127^3 -1/133^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(3\pi/52)/\cos^3(3\pi/52)$

$A13 = 1/25^3 - 1/27^3 +1/77^3 -1/79^3 +1/129^3 -1/131^3 + \cdots =(\pi/52)^3\sin(\pi/52)/\cos^3(\pi/52)$

$A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6 +A7 -A8 +A9 -A10 +A11-A12 +A13=L(3)=\pi^3/32$ である。

A1,−A2,A3,−A4,A5,−A6,A7,−A8,A9,−A10,A11−A12,A13 がL(3)の１３分身である。

念のため、上の全式に対しExcel マクロで数値検証したが、左辺値と右辺値は一致した。

==

導出方法は以下の通りである。

＝＝

[分身の導出方法]

上の分割級数(分身)の導出方法の概要を示す。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdot\cdot=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式②を使う。

$1/(1^2-x^2)^3+1/(3^2-x^2)^3+1/(5^2-x^2)^3+\cdot\cdot=(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)+\mathrm{Others}(x)$ ----②

右辺の Others(x)はＬ(3)に関係しない関数なので（じつはζ(2)とＬ(1)に関係)、”Others(x)”とした。
ここで Others(x)は次のものである。

$\mathrm{Others}(x)=-(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2)+(3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$

注記：Others(x)のはじめのπ^2の項がζ(2)に関係し、二つ目のπの項がＬ(1)に関係している。

さて、次のように上記②のｘに特定の値を代入することでＬ(3)の分身が次々に求まっていく。

②のｘに{26-(2n-1)}/26 を代入すると、An が得られる。ここでｎは１から 13 の整数。
例えばn＝3 として②のｘに 21/26 を代入すると、A3 が得られる。

（注記）②の左辺級数からＬ(1)とζ(2)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺のＬ(1)とζ(2)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単にＬ(3)の分割級数（分身）を求めることができる。Ｌ(5)，Ｌ(7)・・でも類似的に同様にできる。

＝＝

このように１３分身が求まった。

上の（注記）の規則性を使うと割合簡単に求めることができるのでぜひ読者もやってみてほしい。その規則を発見するまでは、ｎが大きいＬ(n)（Ｌ(3),Ｌ(5),Ｌ(7)・・など）の分身を求めるのは大変であった。

A7 は、じつはＬ(3)そのものになっている。$A7=1/13^3(1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+\cdot\cdot)$とできるから容易にわかるだろう。これはＬ(1)分割の証明（その１４７）で示したことの類似である。つまり、奇数分割の中間（真ん中）の分身は元ゼータそのものになる。よって今回見た１３分割は結局は１２分割となる。

今回のＬ(3)１３分身は、以前に示したＬ(1)１３分身と形が全く同じであることにも注目したい。
⇒（その１０９）
L(1)からL(3)に移っても全く秩序が壊れないというゼータの保存性のよさを味わっていただきたい。

2020.2.29　杉岡幹生