＜ 実[双]行列の集合は体を成す ＞

今回は（その１４４）で示した実[双]行列の“階層”の概念をもう少し明確化し、さらに同サイトで示唆した「実[双]行列は体を成す」---①という事実を証明したい。これは実[双]行列が実数とよく似た性質をもっていることを意味している。

①は正確には「正則なｎ行ｎ列の実[双]行列の全体の集合は、体を成す。それが任意のｎで成り立つ。」ということである。“正則な”は「逆行列を持つ（行列式 ≠0)」の意味である。

はじめに実[双]行列に関しこれまでに分かったことをまとめておきたい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

(1) 実[双]行列は、掛け算に関して可換である。これはｎ行ｎ列の実[双]行列で成り立つ。（その１３８）

(2) 実[双]行列の集合は、掛け算に関してアーベル群（無限群）を成す。これはｎ行ｎ列の実[双]行列で成り立つ。（その１４２）

(3) ｎ行ｎ列の実[双]行列は、ｎ個の基底を持つ。（その１４３）

(4) ｎ行ｎ列の実[双]行列における各階層の基底の集合は、群を成す。（その１４４）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

まず実[双]行列（実−双対角対称行列のこと）は、例えば４次と５次では次の美しい対称的なものである（成分は実数）。この形を覚えていただきたい。

$$\mathrm{G4}=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & b & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}\qquad \mathrm{G5}=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

注記：実−双対角対称行列は実対称行列の一種であり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つそれぞれの対角線以外の成分は全て０となるものを言う。

（その１４４）でも示したが、上の(4)の“階層”の意味をもう少し補足し、明確化したい。例で示すと４次の実[双]行列は次のように表現される。

$$\mathrm{G4}=\begin{bmatrix}\mathrm{a} & 0 & 0 & \mathrm{b}\\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} & 0\\ 0 & \mathrm{B} & \mathrm{A} & 0\\ \mathrm{b} & 0 & 0 & \mathrm{a}\end{bmatrix}$$

この G4 の基底 E_1, E_2, E_3, E_4 を次のように定義する。これらも実[双]行列である。

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}、E_2=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}、E_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}、E_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

G4 はこの四つの基底で次のように一意に表される。

$$\mathbf{G4 = aE_1 + bE_2 + AE_3 + BE_4}$$

E_1, E_2 が一つの階層（独立国）、E_3, E_4 が別の階層（独立国）を成しているが、“独立国”の意味を説明しよう（(その１４４) も参照)。

ポイントは、異なる階層同士の基底の掛け算はゼロ(零行列)になることである（例えば E_2E_3＝O）。つまり異なる階層間では、基底同士は掛け算に関して影響を受けないのである。各階層はそれぞれで独立国を形成しているかのようである。これが階層を独立国と呼んだ理由である。よって４次では、[E_1, E_2]国と[E_3, E_4]国の二つの階層があることになる。

５次（5 行 5 列）では

$$\mathbf{G5 = aE_1 + bE_2 + AE_3 + BE_4 + cE_5}$$

となり、E_1, E_2 が一つの階層を成し、E_3, E_4 が別の階層を成し、E_5 がさらにまた別の階層を成している。
よって、５次は階層が三つある。

６次（6 行 6 列）は

$$\mathbf{G6 = aE_1 + bE_2 + AE_3 + BE_4 + cE_5 + dE_6}$$

となり、E_1, E_2 が一つの階層を成し、E_3, E_4 が別の階層を成し、E_5, E_6 がさらにまた別の階層を成す。
よって、６次は階層が三つある。

E_1, E_2 を第一階層、E_3, E_4 を第二階層、E_5, E_6 を第三階層・・と名付けることにしよう。今後、この第 n 階層という呼称を多用していく。(奇数次では最高次の階層の基底は１個のみ)

以上から、例えば７次は第一階層(E_1, E_2)、第二階層(E_3, E_4)、第三階層(E_5, E_6)、第四階層(E_7)の四つの階層をもつことが容易にわかるだろう。

まとめると次となる。

****
■ 2n 行 2n 列の実[双]行列の階層は、n 個ある。
■ (2n-1)行(2n-1)列の実[双]行列の階層は、n 個ある。
****

さて、次に今回の主題である「正則な実[双]行列の全体の集合は、体を成す」という事実を証明しよう。

＝＝＝

＜　実[双]行列の全体の集合は体を成すことの証明　＞

正則なｎ行ｎ列の実[双]行列の全体の集合が体を成すことを証明する。

証明は簡単である。なぜなら、既に（その１４２）で実[双]行列が乗法に関し可換群となることを証明したので、それをそっくり利用できるからである。

まず体の公理を示す。

うまくまとめられている「物理のかぎしっぽ」から引用（言い回しなど若干修正）。

以下の条件を満たす集合を体と呼ぶ.

****

(1)加法について可換群になっている。(加法が閉じており，単位元 0 ，逆元 −a がある)。加法の単位元を特に零元と呼ぶ。

(2)乗法について可換群になっている。(乗法が閉じており，単位元 e ，逆元 a^{-1} がある。ただし，加法の単位元 0 の逆元だけは定義できない。)

(3)加法と乗法について分配法則が成り立つ。 (a+b)c=ac+bc, a(b+c)=ab+ac

****

(1)は、加法（足し算、引き算）に関して述べられている。これは一般のｎ行ｎ列の行列で（当然！）成り立つことがわかっている。実[双]行列はｎ行ｎ列の行列であるから、(1)を満たすことが分かる。

(2)は、乗法（掛け算、割り算）に関することである。

正則なｎ行ｎ列の実[双]行列が、乗法に関して可換群（アーベル群）を成すことは、（その１４２）で既に示した。そこでは行列式≠0の条件で、逆元（逆行列）が存在することを示した。逆行列があることは、割り算ができることと同じである。よって、正則なｎ行ｎ列の実[双]行列は(2)を満たすことが分かる。

(3)の分配則は一般の（普通の）ｎ行ｎ列の行列で成り立つ。よって当然ｎ行ｎ列の実[双]行列でも成り立つ。

以上より、ｎ行ｎ列の実[双]行列（行列式≠0）の全体の集合は、(1),(2),(3)を満たすことが分かった。
すなわち、正則な実[双]行列はどの次元においても体を成すことが証明された。
（証明終わり）

＝＝

このように実[双]行列は体を成すことが分かった。これは実数のように四則演算が自由自在にできることを意味している。そして（その１４３）で導入した基底を使うとさらに計算がしやすくなる。

高次の実[双]行列を計算する場合、ノートのスペースを無駄に広く使ってしまうが、基底を使うとスペースを節約でき、計算も普通の代数計算のようにできて大変便利である。（異なる階層の基底同士の計算が出るとそれをゼロにすればよい（例えば、E_2E_3＝Ｏ）。他は普通の計算と同じ。最後に基底同士の簡単な計算則を使って行列に復活させればＯＫ。）

最後に、構想や予想、アイディアなど思いつくまま書いておく。

****

■今回、実[双]行列の集合は体を成すとわかった。このことから、実[双]行列の集合は可換環であり、さらには可換群であると言える。群、環、体の関係は次のようになっている。

群⊂環⊂体

群は環に含まれ、環は体に含まれている。よって集合Ａが体と分かれば、Ａは環(それは可換環)であるし、また群（それは可換群）でもある。制約条件が一番緩いのが群であり、最も厳しいのが体である。

■「実[双]行列は体を成す（実数に似ている)」ことと、少し前に調べた行列方程式のことはつながっているかもしれない。(その１４１）あたりで、若干表現は変えているが、次のことを研究していた。

「実[双]行列のｎ次固有方程式に対応するｎ次行列方程式は、ｎ個の実[双]行列の解をもつ。それらｎ個の行列解は、解と係数の関係を満たす。」

そこでは固有値問題の固有方程式に限定して研究していたのだが、その“固有”という限定を外せるのではないか？とふと思った。すなわち、

「任意の行列方程式に対して、解と係数の関係を満たす実[双]行列の解が存在するのではないか？」

と・・

２次行列方程式を調べた結果、それは正しいと分かった！ 任意のｎ次でも成り立つことはほとんど確実である。一挙に世界がひろがった感じで、これは面白いテーマである。

■実[双]行列は、実対称行列であり、エルミート行列である。それはζ(s)を含むＬ(χ，ｓ)ゼータの明示的な特殊値域の構造を映し出すディスプレイ装置となっている。

実[双]行列は、ゼータの(自明な)零点界の美しい対称性を表現しており、チェビシェフ多項式をはじめ直交多項式、超幾何関数の性質も背負いこんでいる。明示的な値のゼータは有理数体上任意 2n 分割可能（どんどん分身に分かれる）という驚愕の事実を反映している。そんな豊かな内容をもっているのが実[双]行列である。

その構造は単純であり、各階層の基底群が(最高次以外)全て同型でそれがフラクタル的に相似的に延々と繰り返されているだけである。

実[双]行列の成分は実数である。任意の行列方程式を考察するには、複素数に拡張したほうがよいだろう。しかし、とりあえず、実[双]行列で扱える行列方程式を考えてみたい。複素数に拡張したら、“実”がとれて、“双対角対称行列”となり、エルミート行列ではなくなる。

****

2020.2.8　杉岡幹生

(参考文献)

「解決！フェルマーの最終定理」(加藤和也著、日本評論社)

「物理のかぎしっぽ」← 群や体の解説がすばらしい。