＜実−双対角対称行列の基底＞

ここしばらく実−双対角対称行列そのものを調べている。この行列は見てきたように掛け算に関し可換であり、形もきれいで、アーベル群（行列式≠0 で）を成したりして、面白いものである。

ゼータ関数の研究を本道として進めている途上で、面白そうな洞窟があって、そちらに入り込んでいる状況といえるかもしれない。いろんな道がアリの巣のようにつながっていて、どこをどう進めばよいかわかりにくいが、感覚で大事と思うところを調べている。

実−双対角対称行列は、例えば、４次と５次では次のような美しい対称的なものである（成分は実数）。まずこの形を頭に入れていただきたい。

$$G4=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & b & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}\qquad G5=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

注記：実−双対角対称行列は、実対称行列の一種であり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つそれぞれの対角線以外の成分は全て 0 となるものを言う。

さらに、実−双対角対称行列には単位行列も含まれるので、確認いただきたい。

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

また“実−双対角対称行列”という名称はすこし長いので、“実[双]行列”と略した表現も使いたい。今後、この実[双]行列を多用する。

さて今回、実[双]行列は基底を用いても表現でき、その基底を使うと、行列が数のように計算できると気づいた。

ベクトルの基底というのはよくある話だが、この場合は行列の基底である。これが本質的なことなのか自信がないが、感触として面白い感じがあって、今回それを示したい。基底を定義し、その計算例を示す。

３次と４次の場合を例として示す。他の次元でも同様に成り立つ。

＝＝＝

＜3 次、４次の実−双対角対称行列の基底と計算例＞

＜３次のケース＞

次の 3 行 3 列の実[双]行列 G3 を考えよう。

$$G3=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

この G3 の基底 E_1, E_2, E_3 を次のように定義する。

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}、E_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}、E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

すると、G3 はこの三つの基底で次のように一意に表される。

$$G3＝aE_1 +bE_2 +cE_3 \qquad \text{------①}$$

このようにできることは、次のように G3 を表せることから容易にわかる。

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}＝a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

まず、三つの基底同士を掛け算した結果を示す。自身同士の掛け算も含む

$$E_1E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E_1$$

$$E_2E_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E_1$$

$$E_3E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=E_3$$

$$E_1E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=E_2$$

$$E_2E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=O$$

$$E_3E_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=O$$

実[双]行列は掛け算で可換であるから、基底の計算でも掛ける順番には無関係であることに注意したい。

①の G3 に対し、例えば、G3 の３回の掛け算（３乗）$G3^3$ を計算しよう。上記の基底の結果を用いて計算すると、普通の数のように計算でき、次のようになる。

$$G3^3＝(aE_1 +bE_2 +cE_3)^3$$

$$＝(a^3+3ab^2)E_1 +(b^3+3a^2b)E_2 + c^3E_3 \qquad \text{------①-2}$$

$G3^3$は、このようにやはり三つの基底で表される。この結果は、行列の形で計算した場合と一致している。

＜４次のケース＞

次の 4 行 4 列の実-双対角対称行列 G4 を考えよう。

$$G4=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & A & B & 0 \\ 0 & B & A & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

この G4 の基底 E_1, E_2, E_3, E_4 を次のように定義する。

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}、E_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}、E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}、E_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

すると、G4 はこの四つの基底で次のように一意に表される。

$$G4＝aE_1 +bE_2 + AE_3 +BE_4 \qquad \text{-------②}$$

このようにできることは、次のように G4 を表せることから容易にわかる。

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & A & B & 0 \\ 0 & B & A & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}＝a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+A\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+B\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

まず、四つの基底同士を掛け算した結果を示す。自身同士の掛け算も含む。

$$E_1E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E_1$$

$$E_2E_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E_1$$

$$E_3E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=E_3$$

$$E_4E_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=E_3$$

$$E_1E_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=E_2$$

$$E_1E_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=0$$

$$E_1E_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=0$$

$$E_2E_3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=0$$

$$E_2E_4=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=0$$

$$E_3E_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=E_4$$

実[双]行列は掛け算で可換であるから、基底の計算も掛ける順番には無関係であることに注意されたい。

②の G4 に対し、例えば G4 の３回の掛け算（３乗）$G4^3$ を計算しよう。上記の基底の結果を用いて計算すると、普通の数のように計算でき、次となる。

$$G4^3=(aE_1+bE_2+AE_3+BE_4)^3$$

$$=(a^3+3ab^2)E_1+(b^3+3a^2b)E_2+(A^3+3AB^2)E_3+(B^3+3A^2B)E_4 \qquad \text{------②-2}$$

$G4^3$ は、このようになりやはり四つの基底で表現される。この結果は行列の形で計算した場合と一致している。

＝＝

今回このように３次と４次を見た。3 行列 3 列の実[双]行列は三つの基底で表現でき、4 行列 4 列の実[双]行列は四つ基底で表現できる。

これは任意の n 行列 n 列でも成り立つ。n 行列 n 列の実[双]行列は、n 個の基底を持つ。

４次の基底同士の掛け算の結果を眺めると、実[双]行列の構造が鮮明にあぶりだされていて面白い。それを一言でいえば、E_1, E_2 ペアの世界と E_3, E_4 ペアの世界が、別の世界になっているということである。独立国が二つある感じである。

注記：３次の場合は、E_1, E_2 ペアの世界と E_3 世界が別の世界になっている（独立国二つ）。

４次での②-2 の前二項と後ろ二項を比べると、形が全く同じであることに気づく。このことは２次でも６次でも８次でも任意の偶数次で成り立つ。同じことの繰り返しである。
２次では２基底（ペアの基底）の独立国が一つある。上で見たように４次では２基底の独立国が二つある。６次では２基底の独立国が三つ、８次では２基底の独立国が四つ・・となる。

奇数次でも３次の類似となる。上で見たように３次では２基底（ペアの基底）の独立国が一つ、１基底の独立国が一つある（独立国計二つ）。５次では２基底の独立国が二つ、１基底の独立国が一つある（独立国計三つ）。７次では２基底の独立国が三つ、１基底の独立国が一つある（独立国計四つ）。
このような規則が単純に繰り返されていく。

このように実[双]行列では、フラクタル的な階層が延々と繰り返されていくだけで構造はシンプルである。そのシンプルさが、ゼータの明示的な特殊値と関係し、分割によって分かれたゼータ分身たちが（πを除いて）√で表現されるという美しい事実につながっているはずである。

最後に、参考までに“基底”の意味を書いておく。

数学入門辞典（岩波書店）から。
****
基底（ベクトル空間（線形空間）の）
n 次元ベクトルのなすベクトル空間（線形空間）R^n を考える。
e_i を第 i 成分が 1、その他の成分が 0 であるような R^n の元とすると、任意の R^n の元 $x=(x_1,\cdots x_n)$ は $e_1,\cdots,e_n$ の１次結合でただ一通りに表せる。すなわち、$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ である。
このように有限次ベクトル空間Ｖの全ての元が、Ｖの n 個の元 $v_1,\cdots,v_n$ によって、$a_1v_1+\cdots+a_nv_n$（a_i は定数）と一意的に表すことができるとき、$\{v_1,\cdots,v_n\}$ をベクトル空間の基底という。
言い換えると、Ｖが $v_1,\cdots,v_n$ で張られ、$v_1,\cdots,v_n$ が１次独立であるとき、$\{v_1,\cdots,v_n\}$ をＶの基底という。
****

このように、基底は普通はベクトルに対して定義されるものだが、今回見たように、実[双]行列でも同じような意味で成り立っており、よって実[双]行列でも基底が定義できると思われる。

2020.1.26　杉岡幹生