＜実-双対角対称行列は無限群（アーベル群）を成す＞

今回は（その１４１）等で示唆した「n 行 n 列の実-双対角対称行列は無限群（アーベル群）を成す（掛け算の演算に関して）」ことを証明したい。この群は、いまやっている行列方程式予想に直接は関係しないが、重要なものなので証明して定理としておきたい。

実-双対角対称行列は、例えば、４次と５次では次のような美しい対称的なものである（成分は実数）。まずこの形を頭に入れておいていただきたい。

$$G4=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & b & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}\qquad G5=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

注記：実-双対角対称行列は、実対称行列の一種であり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つそれぞれの対角線以外の成分は全て 0 となるものを言う。

一般の正方行列の集合は、行列式が 0 であるものを除くと一般線形群（無限群）となる。もちろん非可換群である。また行列式が 1 のものに限ると、その集合も特殊線形群という無限群を構成する。これも非可換群である。

さて、n 行 n 列の実-双対角対称行列（行列式が 0 でない）の集合は無限群のアーベル群（可換群）となる。それを以下、証明する。

２次(n＝2)～６次(n＝6)での成立をまず示して、次に全ての n で成り立つことを示す。

＝＝＝

＜n 行 n 列の実-双対角対称行列が無限群（アーベル群）を成すことの証明＞

n 行 n 列の実-双対角対称行列は、掛け算の演算に関してアーベル群を成すことを証明する。次の五つを満たすことを言うことで、アーベル群（可換群）となることを示す。

(1)閉集合性、(2)結合則、(3)単位元の存在、(4)逆元の存在、(5)可換性

(1)の閉集合性と(5)の可換性に関しては、（その１３８）で既に証明したので、n 行 n 列の実-双対角対称行列の集合に対しては、既に(1),(5)は成り立っている。（つまり、実-双対角対称行列同士掛け算しても実-双対角対称行列になる。実-双対角対称行列は掛け算に関して可換である。）

(2)の結合則と(3)の単位元の存在は、一般の正方行列で成り立つことなので、当然、実-双対角対称行列でも成り立つ。

すなわち、(1),(2),(3),(5)は既に成り立っている。よって、以下では(4)の逆元の存在を示すだけでよい。

＜２次のケース＞

次の 2 行 2 列の実-双対角対称行列 G2(2 は 2 次の意味)で逆元（逆行列）があることを示す。

$$G2=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

ここで、a,b は、行列式|G2|＝$a^2-b^2\neq0$ を満たす任意の実数とする。その場合、次の逆行列 $G2^{-1}$ が存在する。

$$G2^{-1}=\frac{1}{(a^2-b^2)}\begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

つまり、次が成り立つ。

$$G2G2^{-1}=G2^{-1}G2=E$$

よって行列式が 0 でない 2 行 2 列実-双対角対称行列の集合は、(1)～(5)を満たすので無限群（アーベル群）となる。

＜３次のケース＞

次の 3 行 3 列の実-双対角対称行列 G3 で逆元（逆行列）があることを示す。

$$G3=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

ここで、a,b,c は、行列式|G3|＝$c(a^2-b^2)\neq0$ を満たす任意の実数とする。つまり $c\neq0$ 且つ $a^2-b^2\neq0$ の場合、逆行列 $G3^{-1}$ が存在し、次が成り立つ（行列式≠0 の場合、逆行列が必ず存在するのは一般の正方行列の性質）。

$$G3G3^{-1}= G3^{-1}G3=E$$

よって行列式が 0 でない 3 行 3 列実-双対角対称行列の集合は、(1)～(5)を満たすので無限群（アーベル群）となる。

＜４次のケース＞

次の 4 行 4 列の実-双対角対称行列 G4 で逆元（逆行列）があることを示す。

$$G4=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & A & B & 0 \\ 0 & B & A & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

ここで a,b,A,B は、行列式|G4|＝$(a^2-b^2)(A^2-B^2)\neq0$ を満たす任意の実数とする。つまり $a^2-b^2\neq0$ 且つ $A^2-B^2\neq0$ の場合、逆行列 $G4^{-1}$ が存在し、次が成り立つ（行列式≠0 の場合、逆行列が必ず存在するのは一般の正方行列の性質）。

$$G4G4^{-1}=G4^{-1}G4=E$$

よって行列式が 0 でない 4 行 4 列実-双対角対称行列の集合は、(1)～(5)を満たすので無限群（アーベル群）である。

＜５次のケース＞

　次の 5 行 5 列の実-双対角対称行列 G5 で逆元（逆行列）があることを示す。

$$
G5=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & A & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & A & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}
$$

　ここで a, b, A, B は、行列式 $|G5| = c(a^2-b^2)(A^2-B^2) \neq 0$ を満たす任意の実数とする。つまり $c\neq 0$ 且つ $a^2-b^2\neq 0$ 且つ $A^2-B^2\neq 0$ の場合、逆行列 $G5^{-1}$ が存在し、次が成り立つ（行列式≠0 の場合、逆行列が必ず存在するのは一般の正方行列の性質）。

$$
G5G5^{-1}=G5^{-1}G5=E
$$

　よって行列式が 0 でない 5 行 5 列実-双対角対称行列の集合は、(1)～(5) を満たすので無限群（アーベル群）となる。

＜６次のケース＞

　次の 6 行 6 列の実-双対角対称行列 G6 で逆元（逆行列）があることを示す。

$$
G6=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & A & 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & A & 0 \\ b & b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}
$$

　ここで a, b, A, B, c, d は、行列式 $|G6| = (a^2-b^2)(A^2-B^2)(c^2-d^2) \neq 0$ を満たす任意の実数とする。つまり $a^2-b^2\neq 0$ 且つ $A^2-B^2\neq 0$ 且つ $c^2-d^2\neq 0$ の場合、逆行列 $G6^{-1}$ が存在し、次が成り立つ（行列式≠0 の場合、逆行列が必ず存在するのは一般の正方行列の性質）。

$$
G6G6^{-1}=G6^{-1}G6=E
$$

　よって行列式が 0 でない 6 行 6 列実-双対角対称行列の集合は、(1)～(5) を満たすので無限群（アーベル群）となる。

　２次～６次を見て気づくように、実-双対角対称行列の行列式には明確な規則性がある。それは例えば、$|G6| = (a^2-b^2)(A^2-B^2)(c^2-d^2)$ で分かるように、内部の 2 行 2 列の行列の行列式を掛け合わせていくだけという簡単な規則である。

　これは７次以上でも全く同様に成り立っている。見てみよう。

　行列式は、余因子展開を使って求められる。（余因子は下記の $\hat{A}_{11}$ とか $\hat{A}_{14}$ のことだが、説明は省く）
例えば、上記４次で場合の余因子展開を見てみよう。G4 を再び示す。

$$G4=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & A & B & 0 \\ 0 & B & A & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

さて、この G4 の行列式は｜｜で表すと次となる。

$$|G4|=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & A & B & 0 \\ 0 & B & A & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad \text{------①}$$

これを第一行に対して余因子展開すると次となる。

$$|G4|＝a\hat{A}_{11}+b\hat{A}_{14}＝a\begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & A & B \\ 0 & B & A \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{-----②}$$

右辺を見ると行列式が二つ見えるが、どちらも、0 以外の文字表現の成分が一つだけある行と列が一つずつあることがわかる。その行（列でも OK）で、さらに余因子展開すると次となる。

$$|G4|＝aa\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} - bb\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}＝(a^2-b^2)\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}＝(a^2-b^2)(A^2-B^2) \quad \text{----③}$$

４次の場合は、まず①の|G4|でどの行、どの列にも(0 以外の)文字表現の成分は二つある。そして、それを展開した②では、二つのどちらの行列式にも、(0 以外の）文字表現の成分を一つだけ持つ行と列が一つずつある（しかもその値は行列式に掛かる値と同じ！）。以下、これと同じことが繰り返されていき、③のように|G4|が求まる。

任意の 2n 次の偶数次では４次と全く同様にして最後まで進んでいく。
また、奇数次(2n+1)次では、「(0 でない)文字表現の成分を一つだけ持つ行と列が一つずつある」ということが、偶数次の 2n 次より一回余計にあるだけで、他は偶数次と全く同様に進んでいく（例えば、|G5|では最終的に$|G5|＝c(a^2-b^2)(A^2-B^2)$のような形になる。１回余計な分が”c”である)。

以上の考察から、任意の n 行 n 列実-双対角対称行列で行列式≠0 を満たす任意の実数成分が存在すると分かる。
従って、行列式が 0 になる場合を除けば、全ての次数で実-双対角対称行列に逆行列が存在するとわかった。

以上により、n 行 n 列の実-双対角対称行列は(1)～(5)を満たすので、掛け算の演算に関してアーベル群を成すことが分かった。行列内の成分は、行列式≠0 を満たす任意の実数なのでそれは無限群となる。
（証明終わり）

＝＝＝

このように、n 行 n 列の実-双対角対称行列の集合は、無限群（アーベル群）となることが分かった。

最後に、この周辺で漠然としたアイディアや予想など浮かんだことをメモしておく。

****
●行列の一般線形群 GL(n,R)や特殊線形群 SL(n,R)は、リー群の主たる例ということである。
（「マスペディア 1000」 リチャード・エルウィス著）
リー群には詳しくないが、数学辞典など見てもそれは難しい。リー群や行列の群は、構造と作用(作用素)にかかわるがゆえに大事なのであろう。
独断と偏見でいえば、行列は作用素ともみなせるので大事なのだと思う。

事実、私は、半年前にゼータ分割での行列の固有値問題を解いた際、行列＝微分作用素の観点から「対応する微分方程式の固有値問題が存在するはず！」と予想し、４か月苦しんだ末、その微分方程式（ガウスの超幾何微分方程式）を発見した。(その１１８)、(その１２０)
その結果、ゼータ世界と超幾何微分方程式の世界がつながり、そして超幾何関数ともつながった。
行列は、異分野をつなげる（島と島に橋をかける）役割を果たすがゆえに、大事なのだと思う。

●微分方程式は、ゼータ分割の行列の固有値問題に対応するものを見出した。
積分方程式という方向はないのか？　行列＝積分作用素と見なせないか？

●今回、証明したように、実-双対角対称行列は無限群のアーベル群となった。
行列の無限群で且つアーベル群となるものは他にないのだろうか？
これはゼータ関数とは関係のない問題だが、興味ある問題である。

****

妄想やアイディアはたくさん出てくるが、ゼータ分割の領域は一大鉱脈であり、いくら掘っても掘りつくせるものではない。ゼータの究極の対称性がこの豊かな鉱脈を作っているとだんだんわかってきた。
対称性がキーなのであろう。

2020.1.19　杉岡幹生