＜L(1)とL(3)の行列方程式まとめ、逆行列＞

（その１３７）～（その１３９）でL(3)の分身値を固有値として持つ行列の方程式で解と係数の関係が成り立つことを見た。それはL(1)でもまったく同様に成り立つのだが、L(1)の場合はまだ示していないので、今回はそれら両方を＜２分身のケース＞としてまとめておきたい。また、それらの行列の逆行列も求めた。

まずL(1)とL(3)を示しておく。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13-1/15+\cdots=\pi/4$

$L(3)=1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+1/9^3-1/11^3+1/13^3-1/15^3+\cdots=\pi^3/32$

さて、L(1)、L(3)の分身を固有値として持つ行列は、実対称行列（エルミート行列）であるが、それは特別に美しい実-双対角対称行列になる。その行列では、次の①が成り立つと考えられる。少なくともL(3)分割での２次（２分身）、３次（３分身）の場合に成り立つことは（その１３９）で見た。

「ｎ次の実-双対角対称行列は、そのｎ次固有方程式に対応するｎ次行列方程式において、ｎ個の行列解をもつ。それらｎ個の行列解は、解と係数の関係を満たす。」--------①

注記：実-双対角対称行列は、実対称行列の一種であり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つそれぞれの対角線以外の成分は全て０となる。

実-双対称行列は、具体的には、例えば４次と５次では次のようなものである。美しい対称的な形である（成分は実数）。

$$G4=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & b & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}\qquad G5=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

では「L(3)、L(1)の分身の値を固有値としてもつ行列（実-双対角対称行列）が、その固有方程式に対応する形の行列の方程式の解となり、それらの解が解と係数の関係を満たす」という興味深い事実を以下に示す。

＝＝

実-双対角対称行列の方程式、解と係数の関係

＜L(3)２分身のケース＞

L(3)２分身の値を固有値に持つ行列（実-双対角対称行列）は二つ存在する。それを $G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}$-p とすると、それらは、

行列方程式 $X^2-16X-8E=O$ ------②

の二つの解となる。

ここで、X, E, Oは２次の正方行列。Eは単位行列、Oは零行列。

（その１３３）で求めた $G2_{L(3)}$ を③に示す。$G2_{L(3)}$ は、$G2_{L(3)}$ 自身の固有値 λ_1 と λ_2 を使ってこのように表現できる。（$\lambda_1=8+6\sqrt{2}$, $\lambda_2=8-6\sqrt{2}$）

$$G2_{L(3)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2\\(\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6\sqrt{2}\\6\sqrt{2} & 8\end{bmatrix}\quad\text{-----③}$$

さて、$G2_{L(3)}$ と同じ固有方程式 $x^2-16x-8=0$、同じ固有値を持つ行列がもう一つあることがわかった。

それを $G2_{L(3)}\text{-p}$ とすると、それは次となる。

$$G2_{L(3)}\text{-p}=\begin{bmatrix}(\lambda_2+\lambda_1)/2 & (\lambda_2-\lambda_1)/2\\(\lambda_2-\lambda_1)/2 & (\lambda_2+\lambda_1)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -6\sqrt{2}\\-6\sqrt{2} & 8\end{bmatrix}$$

$G2_{L(3)}\text{-p}$ は、上記③の λ_1 と λ_2 の置換（２次の置換）を行って得られる。

２次の置換⇒　恒等置換$\begin{pmatrix}\lambda 1 & \lambda 2\\\lambda 1 & \lambda 2\end{pmatrix}$：$G2_{(3)}$，　　互換$\begin{pmatrix}\lambda 1 & \lambda 2\\\lambda 2 & \lambda 1\end{pmatrix}$：$G2_{(3)}\text{-p}$

２次の置換はこの二つの置換から成るが、変化のない恒等置換が $G2_{L(3)}$ に対応し、互換（λ_1 と λ_2 の交換）が $G2_{L(3)}\text{-p}$ に対応する。$G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}\text{-p}$ を一緒に並べよう。

$$G2_{L(3)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2\\(\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6\sqrt{2}\\6\sqrt{2} & 8\end{bmatrix}$$

$$G2_{L(3)}\text{-p}=\begin{bmatrix}(\lambda_2+\lambda_1)/2 & (\lambda_2-\lambda_1)/2\\(\lambda_2-\lambda_1)/2 & (\lambda_2+\lambda_1)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -6\sqrt{2}\\-6\sqrt{2} & 8\end{bmatrix}$$

$G2_{L(3)}$ と $G2_{L(3)}\text{-p}$ は、②での解と係数の関係　$G2_{L(3)}+G2_{L(3)}\text{-p}=16E$, $G2_{L(3)}G2_{L(3)}\text{-p}(=G2_{L(3)}\text{-p}G2_{L(3)})=-8E$ を満たしている！

その事実は、$G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}\text{-p}$ に共通の代数(固有)方程式 $x^2-16x-8=0$ と、その解（固有値）λ_1 と λ_2 の解と係数の関係（$\lambda_1+\lambda_2=16$, $\lambda_1\lambda_2=-8$）に完全に呼応している。（$\lambda_1=8+6\sqrt{2}$, $\lambda_2=8-6\sqrt{2}$）

$G2_{L(3)}$、$G2_{L(3)}\text{-p}$ は共に共通の固有値 λ_1 と λ_2 と共通の固有ベクトル $\mathbf{p}_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ を持つが、固有値と固有ベクトルの関係はそれぞれで入れ違っている。

つまり、$G2_{L(3)}\mathbf{p}_1=\lambda_1\mathbf{p}_1$, $G2_{L(3)}\mathbf{p}_2=\lambda_2\mathbf{p}_2$ に対して、$G2_{L(3)}\text{-p}\,\mathbf{p}_1=\lambda_2\mathbf{p}_1$, $G2_{L(3)}\text{-p}\,\mathbf{p}_2=\lambda_1\mathbf{p}_2$ となっている。

＜L(1)２分身のケース＞

L(1)２分身の値を固有値に持つ行列（実-双対角対称行列）は二つ存在する。それを $G2_{L(1)}$、$G2_{L(1)}\text{-p}$ とすると、それらは、

行列方程式 $X^2-2X-E=O$　-----④

の二つの解となる。

ここで、X,E, Oは２次の正方行列。Eは単位行列、Oは零行列。

（その９６）で求めた $G2_{L(1)}$ を⑤に示す。$G2_{L(1)}$ は、$G2_{L(1)}$ 自身の固有値 λ_1 と λ_2 を使ってこのように表現できる。（$\lambda_1=1+\sqrt{2}$, $\lambda_2=1-\sqrt{2}$）

$$G2_{L(1)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2\\(\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\\\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}\quad\text{------⑤}$$

さて、$G2_{L(1)}$ と同じ固有方程式 $x^2-2x-1=0$、同じ固有値を持つ行列がもう一つあることがわかった。
それを $G2_{L(1)}$-p とすると、それは次となる。

$$G2_{L(1)}\text{-p}=\begin{bmatrix}(\lambda_2+\lambda_1)/2 & (\lambda_2-\lambda_1)/2\\(\lambda_2-\lambda_1)/2 & (\lambda_2+\lambda_1)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}\\-\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$$

$G2_{L(1)}$-p は、上記③の λ_1 と λ_2 の置換（２次の置換）を行って得られる。

２次の置換⇒　恒等置換 $\begin{pmatrix}\lambda 1 & \lambda 2\\\lambda 1 & \lambda 2\end{pmatrix}$: $G2_{L(1)}$,　　互換 $\begin{pmatrix}\lambda 1 & \lambda 2\\\lambda 2 & \lambda 1\end{pmatrix}$: $G2_{(1)}$-p

２次の置換はこの二つの置換から成るが、変化のない恒等置換が $G2_{L(1)}$ に対応し、互換（λ_1 と λ_2 の交換）が $G2_{L(1)}$-p に対応する。$G2_{L(1)}$、$G2_{L(1)}$-p を一緒に並べよう。

$$G2_{L(1)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2\\(\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\\\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$G2_{L(1)}\text{-p}=\begin{bmatrix}(\lambda_2+\lambda_1)/2 & (\lambda_2-\lambda_1)/2\\(\lambda_2-\lambda_1)/2 & (\lambda_2+\lambda_1)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}\\-\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$$

$G2_{L(1)}$ と $G2_{L(1)}$-p は、なんと④の解と係数の関係　$G2_{L(1)}+G2_{L(1)}\text{-p}=2E$, $G2_{L(1)}G2_{L(1)}\text{-p}(=G2_{L(1)}\text{-p}G2_{L(1)})=-E$ を満たしているである！

その事実は、$G2_{L(1)}$、$G2_{L(1)}$-p に共通の代数(固有)方程式 $x^2-2x-1=0$ と、その解（固有値）λ_1 と λ_2 の解と係数の関係（$\lambda_1+\lambda_2=2$, $\lambda_1\lambda_2=-1$）に完全に呼応している。（$\lambda_1=1+\sqrt{2}$, $\lambda_2=1-\sqrt{2}$）

$G2_{L(1)}$、$G2_{L(1)}$-p は共に共通の固有値 λ_1 と λ_2 と共通の固有ベクトル $\mathbf{p}_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ を持つが、固有値と固有ベクトルの関係はそれぞれで入れ違っている。

つまり、$G2_{L(1)}\mathbf{p}_1=\lambda_1\mathbf{p}_1$, $G2_{L(1)}\mathbf{p}_2=\lambda_2\mathbf{p}_2$ に対して、$G2_{L(1)}\text{-p}\,\mathbf{p}_1=\lambda_2\mathbf{p}_1$, $G2_{L(1)}\text{-p}\,\mathbf{p}_2=\lambda_1\mathbf{p}_2$ となっている。

＝＝＝

続いて、$G2_{L(1)}$ と $G2_{L(3)}$ の逆行列を求めよう。

＝＝＝

$G2_{L(1)}$と$G2_{L(3)}$の逆行列

一つ上での$G2_{L(1)}$と$G2_{L(3)}$を再掲する。

$$G2_{L(1)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2\\(\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\\\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}\quad\text{------⑤}$$

$$G2_{L(3)}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2\\(\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6\sqrt{2}\\6\sqrt{2} & 8\end{bmatrix}\quad\text{-----③}$$

⑤と③で、λ_1とλ_2を同じ記号で書いているが、⑤では$G2_{L(1)}$の固有値（$\lambda_1=8+6\sqrt{2}$, $\lambda_2=8-6\sqrt{2}$）で、③では$G2_{L(3)}$の固有値（$\lambda_1=1+\sqrt{2}$, $\lambda_2=1-\sqrt{2}$）であり、実際は違う値なので注意いただきたい。

⑤、⑥の固有値λ_1, λ_2での表現を見ると、⑤も③もまったく同じ形（構造）をしていることは注目に値にする。

$G2_{L(1)}$と$G2_{L(3)}$の逆行列を求めると、次となる。

$$G2_{L(1)}^{-1}=(1/(\lambda_1\lambda_2))\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_2-\lambda_1)/2\\(\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \sqrt{2}\\\sqrt{2} & -1\end{bmatrix}\quad\text{------⑤-2}$$

$$G2_{L(3)}^{-1}=(1/(\lambda_1\lambda_2))\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_2-\lambda_1)/2\\(\lambda_2-\lambda_1)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & (3/4)\sqrt{2}\\(3/4)\sqrt{2} & -1\end{bmatrix}\quad\text{---③-2}$$

逆行列においても、固有値λ_1, λ_2での表現は上記の通り当然両者で同じになる（⑤と③で同じだから）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

以上、L(1)とL(3)の分身では、その行列方程式と解と係数の関係、そして逆行列までその構造が全く同じであるとわかった。

行列方程式で解と係数の関係が成り立つという特別なことが起こっているのは、（その１３８）で証明した「実−双対角対称行列は掛け算に関して可換である」という重要な事実があるからである（解と係数の関係での掛け算の順番を気にせずに済む）。

2020.1.02　杉岡幹生