＜ L(3) ２分割、固有方程式 ＞

これまでζ(2)とL(1)を中心にその分割（分身たち）を調べてきた。それに関しては固有方程式、エルミート行列を経由して微分方程式まで行き着いたので一応終了とし、これからはL(3)、ζ(4)に軸足を移していきたい。また虚 2 次体 Q(√-3)ゼータ LA(s)の s=1 の LA(1)も同時に調べたい。

L(3)は（その１６）で、ζ(4)は（その１７）で、LA(1)は（その２９）などで単発的に調べたのみであり、系統的にはまだ調べられていない。これから調べていきたい。

今回は、L(3)２分割を調べる。これは（その１６）で導出したものだが、L(3)２分身を解にもつ固有方程式を今回求めた。なお。L(3)はL(s)の s＝3 の次のものである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +\cdot\cdot = \pi^3/32$ ------①

L(1)分割（分身たち）を解にもつ固有方程式は、パスカルの三角形（二項係数）を係数にもつ方程式となったが、上記L(3)の分割ではどのような方程式になるのであろうか。それは大変興味あることである。

ここで注意しておきたいのだが、ゼータ分割で扱うのは、<u>明示的な特殊値に対応するもの</u>を中心としたい。つまり、$\zeta(2)=\pi^2/6$ や $\zeta(4)=\pi^4/90$・・や $L(1)=\pi/4$ や $L(3)=\pi^3/32$・・などである。
L(2)やζ(3)など現代数学で不明とか言われる非明示的なものは、このシリーズではほとんど扱わない。
(その４８)で非明示のL(2)の２分割を求めたが、非常にたいへんな計算になり、結果も積分が混じる綺麗なものにならなかった。

イメージで言えば、明示的なものは「春の陽気」であるが、非明示的なものは「暴風雨が吹き荒れる嵐」のようなものである。

もちろん、ζ(2.7)とかL(√3)なども扱わない。L(2)やζ(3)をはじめ、ζ(2.7)とかL(√3)を計算すると、すべてそれらは、ゼータの値＝「ゼータの無限和」という形で求まってくる。これは、以前私が作ったテイラーシステムという手法を使えばわかる。それを使えばL(2)やζ(3)やζ(2.7)とかL(√3)がまったく簡単に導出できる。

テイラーシステムを使うと、なぜζ(2)やL(1)が明示的にきちんと求まるかの理由もよくわかる。それは、<u>自明な零点が関係</u>しているからだが、詳しくは下記を参照願いたい。
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page118.htm
http://www5b.biglobe.ne.jp/sugi_m/page128.htm

逆にいえば、ζ(s)では、s=2,4,6,・・以外の<u>任意の実数点では</u>、(s＝0,-1,-2,-3,-4・・を除いて）すべて
ゼータの値＝「ゼータの無限和」
となるのである。

「明示的な値という特殊ケースだけ研究して意味があるのか？」と読者は思われるかもしれない。意味は大ありである。

きちんとは述べられないが、それは<u>ゼータの零点に関係しているから</u>である。明示的な特殊値の場合は、自明な零点に関係している。それは、おそらく非自明な零点（リーマン予想）にも関係している。であるがゆえ

に、明示的な場合の分身たちは、高い対称性の泉から湧き出てきているのだと思う。非自明な零点をゼータを中心に据えた場合、本シリーズの「ゼータの分割(分解)」はその周辺をぐるぐると回っている、現代数論で主流の岩澤理論はさらにその外側をぐるぐると回っている、というイメージであろうか。

とにもかくにも明示的なケースは、零点に関係しているがゆえに大切なものなのである。

話が長くなったので、明示、非明示の話はこの辺で終わる。

主題に戻る。

L(3)２分割の２分身を示す。１分割も含めた。これは（その１６）で導出したもの（それからの抜粋）だが、Others(x)の正体ほか付加的な情報も加えた。最後にL(3)２分身を解にもつ固有方程式を求めた。

＝＝＝

■L(3)１分割

$L(3)=1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+\cdots=(\pi/4)^3\sin(\pi/4)/\cos^3(\pi/4)$

右辺は$\pi^3/32$になり、①右辺値に一致する。

■L(3)２分割

$A1=1-1/7^3+1/9^3-1/15^3+1/17^3-1/23^3+\cdots=(\pi/8)^3\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$

$A2=1/3^3-1/5^3+1/11^3-1/13^3+1/19^3-1/21^3+\cdots=(\pi/8)^3\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$

$A1-A2=L(3)=\pi^3/32$ である。<u>A1, −A2 がL(3)の２分身である</u>。
右辺の三角関数の値を計算した結果は、以下の通り。

$\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)=8+6\sqrt{2}$

$\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)=-8+6\sqrt{2}$

上記A1,A2式に対しExcelマクロで数値検証したが、左辺の級数は右辺値に収束した。

＝＝＝

上の分割級数の導出過程を簡単に述べる。出発点はタンジェント部分分数展開式だが、次のものである。

$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式を使う。

$1/(1^2-x^2)^3+1/(3^2-x^2)^3+1/(5^2-x^2)^3+\cdots=(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)+\mathrm{Others}(x)$ ---②

ここで右辺のOthers(x)はL(3)に関係しない関数なので（じつはζ(2)とL(1)に関係)、”Others(x)”とした。 ここでOthers(x)は次の通り。

$\mathrm{Others}(x)=-(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2)+(3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$

注記：Others(x)のはじめのπ^2の項がζ(2)に関係し、二つ目のπの項がL(1)に関係している。

上記②の x に特定の値を代入することで、L(3)の分割級数が次々に求まっていく。以下の通り。

②の x に値 1/2 を代入すると、１分割のL(3)＝$\pi^3/32$ が得られる。
②の x に値 3/4 を代入すると、２分割の A1 が得られる。
②の x に値 1/4 を代入すると、２分割の A2 が得られる。

注記：②の左辺級数からL(1)とζ(2)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺のL(1)とζ(2)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで、計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単にL(3)の分割級数（分身）を求めることができる。
＝＝＝

このようにL(3)の分身が求まった。さて、次にL(3)２分割の固有方程式を求めたい。

上記の結果を再掲する。

$A1= 1 - 1/7^3 +1/9^3 -1/15^3 + 1/17^3 -1/23^3 + \cdots = (\pi/8)^3\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$

$A2=1/3^3 -1/5^3 +1/11^3 -1/13^3 + 1/19^3 -1/21^3 + \cdots = (\pi/8)^3\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$

右辺値における$(\pi/8)^3$は無視して、$\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)=8 +6\sqrt{2}$ と $\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)=-8 +6\sqrt{2}$ を解に持つ固有方程式（二次方程式）を求めると、解と係数の関係から簡単に求まり、次となる。

$x^2 -16x -8=0$ ----③

念のために、$(\pi/8)^3$も含めた$(\pi/8)^3\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$と$(\pi/8)^3\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$を解にもつ方程式を出すと、次のようになる。なお、$A=\pi/8$ とした。

$x^2 -16A^3x -8A^6=0$ -----④

④は、$x=A^3 t$ と変数変換すると③に移行できる。逆に③で $x=z/A^3$ と変数変換すると④に移行できる。すなわち、③と④は本質的に等しい。したがって、ややこしい$(\pi/8)^3$を除いた場合の③を、今後[L(3)の２分身を解にもつ固有方程式]としていく。これは、これまでのL(1)、ζ(2)でも一貫してそうであったし、今後も一貫してそのようにしていくので、覚えておいていただきたい。

１分割の固有方程式は、右辺値の $\sin(\pi/4)/\cos^3(\pi/4)=2$ から、次となる。

$x -2=0$

まとめると、次となる。

****

[L(3)の分身を解にもつ固有方程式]

１分割（１分身を解にもつ固有方程式）⇒ $x -2=0$
２分割（２分身を解にもつ固有方程式）⇒ $x^2 -16x -8=0$

****

今回はここまでである。

３分割、４分割・・としていったとき、固有方程式はどんな姿になるのだろうか？ L(1)でのパスカル三角形と関係するものになるのか？ これは非常に興味あることである。

いずれにしても、高い対称性をもった方程式になることだけは間違いがないと思う。

2019.9.1　杉岡幹生