＜　L(1)n 分割のいとこ解 $y=(1-x)^n$ は、さらに簡単な微分方程式で　＞

（その１１８）で下方[1]の L(1)n 分割の微分方程式に対し変数変換を行って得た超幾何微分方程式から、L(1)n 分割の“いとこ(従兄弟)”解ともいうべき解 $y=(x-1)^n$ を得ました。それは幾何学的な Goldberg 関係式に似たものでした。そして $y=(x-1)^n$ は次の超幾何微分方程式①の解なのでした。

$$x(x-1)y''-\{1-n-2(1-n)x\}y'+n(n-1)y=0 \quad \text{----①}$$

（n=1, 2, 3,・・）

$y=(x-1)^n$ は、じつはもっと簡明な微分方程式の解になります。結論をいうと次のものです。

$$(x-1)y'-ny=0$$

（n=1, 2, 3,・・）

驚くべき簡明さです。今回は、これに至った経緯を説明します。

まず L(1)n 分割の微分方程式（最終形）を再掲します。

L(1)n 分割の微分方程式（最終形）

$$(x^2+1)y''-2(n-1)xy'+n(n-1)y=0 \quad \text{-----[1]}$$

（n=1, 2, 3・・）

または

$$(x^2+1)^n\frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\}=n(1-n)y \quad \text{-----[2]}$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

[1]と[2]は以下の L(1) n 分身の値を解に持つ方程式での y=左辺多項式を解にもつ。例えば L(1)３分身の場合、n=3 とした[1]と[2]は、$y=x^3-3x^2-3x+1$ を特殊解に持つ。

L(1)１分身の値を解に持つ方程式⇒ $x-1=0$
L(1)２分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^2-2x-1=0$
L(1)３分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^3-3x^2-3x+1=0$
L(1)４分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$
L(1)５分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$
L(1)６分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1=0$
L(1)７分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0$
・・・・・・

$x(x-1)y''-\{1-n-2(1-n)x\}y'+n(n-1)y=0$ ----①

この超幾何微分方程式①の解が $y=(x-1)^n$ となることは（その１１８）で見ましたが、その右辺を展開すると次となります（二項展開式)。これは上記の「L(1) n 分割の値を解に持つ方程式の多項式」に似ていますが、符号＋－の並びが違っています。

[①の解]

$n=1 \Rightarrow y=(x-1)^1=x-1$

$n=2 \Rightarrow y=(x-1)^2=x^2-2x+1$

$n=3 \Rightarrow y=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

$n=4 \Rightarrow y=(x-1)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

$n=5 \Rightarrow y=(x-1)^5=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

$n=6 \Rightarrow y=(x-1)^6=x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$

・

・

マグロウヒル公式集を眺めていると、超幾何微分方程式

$x(x-1)y''-\{c-(a+b+1)x\}y'+aby=0$ ------[A]

の解の「特殊な例」の一つとして、$y=(1+x)^p$ があり、$F(-p, 1; 1; -x)=(1+x)^p$ として載っています。
ここで F( )は超幾何関数です（下記参照)。
p を n に、x を－x に置き換えると、$y=F(-n, 1; 1; x)=(1-x)^n$ となって、それは[A]の解としては本質的に $y=(x-1)^n$ に等しくなります（ [A]は線形だからそれで OK。下記②も参照)。

復習ですが、超幾何微分方程式の解として超幾何関数 $y=F(a, b; c; x)$ が知られています。

$$F(a, b; c; x)=1+\frac{a \cdot b}{1 \cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots$$

ここで a, b, c が実数のとき、この級数は $c-(a+b)>-1$ という条件で $-1<x<1$ に対して収束します。

$F(-n, 1; 1; x)=(1-x)^n$ から <u>a=－n, b=1, c=1</u> です。よって、F(－n, 1; 1; x)に対応する超幾何微分方程式は、[A]から次となります。

$x(x-1)y''+\{(2-n)x-1\}y'-ny=0$ -------②

上方の考察から②は $y=(x-1)^n$ を解に持つことがわかります。

以上から、<u>$y=(x-1)^n$ は、①の解（特殊解）であり、②の解（特殊解）でもある</u>ことがわかりました。

①、②を並べます。

$x(x-1)y''-\{1-n-2(1-n)x\}y'+n(n-1)y=0$ ----①

$x(x-1)y''+\{(2-n)x-1\}y'-ny=0$ -----②

辺々引き算して、

$$(x-1)y'-ny=0 \quad \text{------③}$$

を得ます。このようにして冒頭での微分方程式に到達しました。

③が $y=(x-1)^n$ を解に持つことは、計算するまでもなく、眺めるだけでわかります。

$y=(x-1)^n$ を「L(1) n 分割の“いとこ(従兄弟)”解」と呼んだのは、兄弟の微分方程式①と[1]の子供(解)同士の関係にあるからです。①の子供は $y=(x-1)^n$ です。一方[1]の子供は上方の「[1]と[2]は以下の L(1) n 分身の値を解に持つ方程式での y=左辺多項式」となります。

なお、冒頭の L(1) n 分割の微分方程式（最終形）[1]または[2]は、③のような簡明なものに変換することは不可能と考えられます。

■考察

③は次のように変形できます。

$$((x-1)/n)\left\{\frac{d}{dx}\right\}y=y \quad \text{-----③}$$

一方、冒頭の[1]つまり[2]は次のように変形できる。

$$((x^2+1)^n/n)\frac{d}{dx}\left\{((x^2+1)^{1-n}/(1-n))\frac{d}{dx}\right\}y=y \quad \text{------ [2]}$$

③と[2]ではだいぶ複雑さが違います。
③は１回ある作用素を y に作用させると元の y に戻ります。[2]は、y にある作用素を作用させ、さらに別の作用素を作用させて元の y に戻ります。

これらの作用（操作）が幾何学的にどんな変換（群）に対応するのか？　これは興味あるテーマです。
L(1)の分身たちは複雑な[2]の方（と言っても美しい形！）から、生まれてきます。

＜参考文献＞

● 「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Muray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳）
● 「数学公式Ⅲ」（森口、宇田川、一松著、岩波書店）

2019.8.9　杉岡幹生