＜ ζ(2)分割の微分方程式は超幾何微分方程式そのもの ＞

ζ(2) n 分割の微分方程式の最終形は（その１１５）で示しました。それに対し変数変換を行うことでチェビシェフの微分方程式（すなわち超幾何微分方程式）に還元されることは既にお伝えした通りです。

そしてさらに調べると、ζ(2) n 分割の微分方程式（最終形）が直接に超幾何微分方程式そのものになっているとわかりましたので、今回それを報告します。

まずは（その１１５）で示したζ(2) n 分割の微分方程式（最終形）を再掲します。

ζ(2) n 分割の微分方程式

$$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x - (4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0 \qquad \text{----①}$$

(n=1, 2, 3,・・)

または

$$x\sqrt{x-1}\,\frac{d}{dx}\left\{x\sqrt{x-1}\,\frac{d}{dx}(y/x^n)\right\} = -n^2(y/x^n) \qquad \text{----②}$$

①と②は本質的に同じ微分方程式である。

①と②は以下の ζ(2) n 分身の値を解に持つ方程式での y=左辺多項式を解にもつ。例えば、ζ(2) 3 分身の場合、n=3 とした①または②は、$y= x^3 -18x^2 +48x -32$ を特殊解に持つ。

ζ(2) １分身の値を解に持つ方程式⇒ $x -2=0$
ζ(2) ２分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^2 -8x +8=0$
ζ(2) ３分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^3 -18x^2 +48x -32=0$
ζ(2) ４分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^4 -32x^3 +160x^2 -256x +128=0$
ζ(2) ５分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^5 -50x^4 +400x^3 -1120x^2 +1280x -512=0$
ζ(2) ６分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^6 -72x^5 +840x^4 -3584x^3 +6912x^2 -6144x +2048=0$
ζ(2) ７分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^7 -98x^6 +1568x^5 -9408x^4 +26880x^3 -39424x^2 +28672x -8192=0$
・
・

以下、①がじつは超幾何微分方程式そのものになっていることを示します。

＝＝＝

[①が超幾何微分方程式になっている理由]

(その１１５)でも見た通り、超幾何微分方程式は次のものです。

$$x(x-1)y'' - \{c - (a+b+1)x\}y' + aby = 0 \qquad \text{---③}$$

③の解として知られるものに超幾何関数 F(a, b; c; x)があります。次のものです。

$$\mathrm{F(a, b; c; x)} = 1 + \frac{\mathrm{a \cdot b}}{1 \cdot c} x + \frac{\mathrm{a(a+1)b(b+1)}}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} x^2 + \frac{\mathrm{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} x^3 + \cdot \cdot \cdot$$

ここで a, b, c が実数のとき、この級数は c–(a+b)> –1 という条件で –1<x<1 に対して収束します。

さて、ζ(2)n 分割微分方程式①と超幾何微分方程式③を並べましょう。

$$\mathrm{2x(x-1)y''} - \{(4\mathrm{n}-3)x - (4\mathrm{n}-2)\}y' + \mathrm{n(2n-1)y} = 0 \quad \text{----①}$$

$$\mathrm{x(x-1)y''} - \{\mathrm{c} - (\mathrm{a+b}+1)x\}y' + \mathrm{aby} = 0 \quad \text{----③}$$

①の両辺を 2 で割り変形して、再び並べると次となります。

$$\mathrm{x(x-1)y''} - \{(1-2\mathrm{n}) - (3/2 - 2\mathrm{n})x\}y' + \mathrm{n(n-1/2)y} = 0 \quad \text{----①-2}$$

$$\mathrm{x(x-1)y''} - \{\mathrm{c} - (\mathrm{a+b}+1)x\}y' + \mathrm{aby} = 0 \quad \text{----③}$$

なにやら似ています。ここで、a＝–n, b＝1/2–n, c＝1–2n と置くと、①-2 は超幾何微分方程式となることがわかります！

これは、上方での超幾何関数での条件 c – (a+b)> –1 も満たしています。a＝–n, b＝1/2–n, c＝1–2n では、

c–(a+b)=1–2n – (–n+1/2–n) = 1/2 > –1 となるので OK です。

よって、①（または①-2）は超幾何微分方程式そのものと分かりました。

以上。

＝＝＝

y＝F(a, b; c; x)で a＝–n, b＝1/2 –n, c＝1 –2n とした y＝F(–n, 1/2–n；1–2n；x)において n＝1,2,3・・として超幾何関数から具体的に①（or ①-2）の解を求めると次のようになります。

n=1 の場合⇒ $y=1 - x/2$

n=2 の場合⇒ $y=1 - x + x^2/8$

n=3 の場合⇒ $y=1 - 3x/2 + 9x^2/16 - x^3/32$

n=4 の場合⇒ $y=1 - 2x + 5x^2/4 - x^3/4 + x^4/128$

n=5 の場合⇒ $y=1 - 5x/2 + 35x^2/16 - 25x^3/32 + 25x^4/256 - x^5/512$

n=6 の場合⇒ $y=1 - 3x + 27x^2/8 - 7x^3/4 + 105x^4/256 - 9x^5/256 + x^6/2048$

n=7 の場合⇒ $y=1 - 7x/2 + 77x^2/16 - 105x^3/32 + 147x^4/128 - 49x^5/256 + 49x^6/4096 - x^7/8192$

・

・

このように求まりました。

注記：n=1 のときだけ最後の項が 0/0 になるデリケートな計算があります。その場合はこの項は無視すべきことが、超幾何関数計算サイトでわかりました。ただし、デリケートな個所はその一箇所だけで、n=2 以降は全く問題なく計算できます。

上記右辺はじつは冒頭でのζ(2) n 分身の値を解に持つ方程式の多項式そのものになっています。次のように変形すればすぐにわかります。

n=1 の場合⇒ $y = -(x-2)/2$
n=2 の場合⇒ $y = (x^2 - 8x + 8)/8$
n=3 の場合⇒ $y = -(x^3 - 18x^2 + 48x - 32)/32$
n=4 の場合⇒ $y = (x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128)/128$
n=5 の場合⇒ $y = -(x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512)/512$
n=6 の場合⇒ $y = (x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048)/2048$
n=7 の場合⇒ $y = -(x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192)/8192$
・
・

( )内が、冒頭でのζ(2)n 分身の値を解にもつ方程式の多項式になっていることが一目瞭然でわかります。

微分方程式①(または①-2)は線形なので、上記式の( )内だけを取り出した次も当然①(または①-2)の解となります。

n=1 の場合⇒ $y = x - 2$
n=2 の場合⇒ $y = x^2 - 8x + 8$
n=3 の場合⇒ $y = x^3 - 18x^2 + 48x - 32$
n=4 の場合⇒ $y = x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128$
n=5 の場合⇒ $y = x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512$
n=6 の場合⇒ $y = x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048$
n=7 の場合⇒ $y = x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192$
・
・

これらは冒頭で掲げたζ(2) n 分割の微分方程式の解そのものです。

このようにして、ζ(2) n 分割の微分方程式は、超幾何微分方程式そのものであることが今回わかりました。

この事実から、チェビシェフ多項式 $T_n(x)$やルジャンドル多項式 $P_n(x)$などが直交性をもつように、ζ(2) n 分割の多項式たちも直交性という性質をもつと考えられますが、まだそこまでは調べられていません。

ちなみに、L(1) n 分割の微分方程式は(その１１８)でも見た次のものですが、これは変数変換して超幾何微分方程式に還元できます（これが超幾何微分方程式そのものではない)。一方、ζ(2)では直接に超幾何微分方程式そのものになっています。この点で、L(1)はζ(2)とすこし違っていると言えます。

L(1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \qquad \text{-----}[1]$$

(n=1, 2, 3・・)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\} = n(1-n)y \qquad \text{-----}[2]$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

[1]と[2]は以下の L(1) n 分身の値を解に持つ方程式での y=左辺多項式を解にもつ。例えば L(1) 3 分身の場合、n=3 とした[1]と[2]は、$y= x^3 -3x^2 -3x +1$ を特殊解に持つ。

L(1) 1 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x -1=0$
L(1) 2 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^2 -2x -1=0$
L(1) 3 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^3 -3x^2 -3x +1=0$
L(1) 4 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$
L(1) 5 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$
L(1) 6 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$
L(1) 7 分身の値を解に持つ方程式⇒ $x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0$
・
・

以上。

2019.8.3　杉岡幹生