

今回は と (2) (つまり  $Z(2)$ ) の 7 分身の値を固有値に持つ実対称行列 (エルミート行列) を求めます。  
 予想の表現を次のように、これまでと若干変えました。本質はもちろんそのままです。

## [ $Z(2)$ 分割-実対称行列 予想]

$Z(2)$  n 分身の特殊値を固有値として持つ実対称行列 (エルミート行列) が存在する。そしてその行列は、右  
 下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となる。

ここで、“n 分身” の意味は、タンジェント部分分数展開式を微分した次式に、 $m/(2n)$  を代入して求めた n  
 分割の n 個の分身たちを指す。(n は 1 以上の整数。  $m=1, 3, 5 \dots, 2n-1$ )

$$1/(1^2-x^2)^2 + 1/(3^2-x^2)^2 + 1/(5^2-x^2)^2 + \dots = (\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2) - (\pi/(8x^3))\tan(\pi x/2)$$

$Z(2)=1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \dots = \pi^2/8$  は、と (2) と次の関係にあり、両者は本質的に等し  
 いものです。“ $Z(s)$ ” という記号は私が独自に使っているものです。

$$\begin{aligned} Z(2) &= 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \dots \\ &= 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + \dots - (1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \dots) \\ &= \zeta(2) - (1/2^2) \zeta(2) = (3/4) \zeta(2) = \pi^2/8 \quad \text{-----①} \end{aligned}$$

以下、 $Z(2)$  7 分身の値を固有値として持つ実対称行列 (エルミート行列) を求めていきます。  
 はじめに  $Z(2)$  7 分割での 7 分身を示します。(その 8 4) から抜粋。

## ■ $Z(2)$ 7 分割

$$\begin{aligned} B1 &= 1 + 1/27^2 + 1/29^2 + 1/55^2 + 1/57^2 + 1/83^2 + \dots = (\pi/28)^2/\cos^2(13\pi/28) \\ B2 &= 1/3^2 + 1/25^2 + 1/31^2 + 1/53^2 + 1/59^2 + 1/81^2 + \dots = (\pi/28)^2/\cos^2(11\pi/28) \\ B3 &= 1/5^2 + 1/23^2 + 1/33^2 + 1/51^2 + 1/61^2 + 1/79^2 + \dots = (\pi/28)^2/\cos^2(9\pi/28) \\ B4 &= 1/7^2 + 1/21^2 + 1/35^2 + 1/49^2 + 1/63^2 + 1/77^2 + \dots = (\pi/28)^2/\cos^2(7\pi/28) \\ B5 &= 1/9^2 + 1/19^2 + 1/37^2 + 1/47^2 + 1/65^2 + 1/75^2 + \dots = (\pi/28)^2/\cos^2(5\pi/28) \\ B6 &= 1/11^2 + 1/17^2 + 1/39^2 + 1/45^2 + 1/67^2 + 1/73^2 + \dots = (\pi/28)^2/\cos^2(3\pi/28) \\ B7 &= 1/13^2 + 1/15^2 + 1/41^2 + 1/43^2 + 1/69^2 + 1/71^2 + \dots = (\pi/28)^2/\cos^2(\pi/28) \end{aligned}$$

$B1 + B2 + B3 + B4 + B5 + B6 + B7 = Z(2) = \pi^2/8$  である。 $B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7$  が  $Z(2)$  の 7 分身であ  
 る。 $B4$  はじつは  $Z(2)$  そのものになっている点にも着目ください。

7 分身  $B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7$  の  $1/\cos^2()$  の部分の値を解にもつ代数方程式は次となります。

$$x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192 = 0 \quad \text{-----} \textcircled{2}$$

②は、 $1/\cos^2(13\pi/28)$ ,  $1/\cos^2(11\pi/28)$ ,  $1/\cos^2(9\pi/28)$ ,  $1/\cos^2(7\pi/28)$ ,  $1/\cos^2(5\pi/28)$ ,  $1/\cos^2(3\pi/28)$ ,  $1/\cos^2(\pi/28)$  の七つを解に持ちます。

B1～B7 すなわち、 $(\pi/28)^2/\cos^2(13\pi/28)$ ,  $(\pi/28)^2/\cos^2(11\pi/28)$ ,  $(\pi/28)^2/\cos^2(9\pi/28)$ ,  $(\pi/28)^2/\cos^2(7\pi/28)$ ,  $(\pi/28)^2/\cos^2(5\pi/28)$ ,  $(\pi/28)^2/\cos^2(3\pi/28)$ ,  $(\pi/28)^2/\cos^2(\pi/28)$  を解にもつ方程式を出すことも当然できますが、それと②は本質的に同じなので、②を採用します。これまでと同じ方針で進めます。

まとめます。

## <Z(2) 7 分身の値を解にもつ代数方程式>

$$x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192 = 0 \quad \text{-----} \textcircled{2}$$

Z(2) 分身たちの値を解にもつ方程式を並べると、それは第一種チェビシエフ多項式に対応するという興味深い事実を（その 8 6）で見ました。それを再掲します（7 分割は今回追記）。7 分割で②が見える。

=====

ζ(2) の分身を生む次の代数方程式に現われている左辺の多項式  $f(x)$  は、第一種チェビシエフ多項式と“本質的に”等しい。

$$\zeta(2) \text{ 1 分割} \Rightarrow x^2 - 2 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 2 分割} \Rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 3 分割} \Rightarrow x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 4 分割} \Rightarrow x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 5 分割} \Rightarrow x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 6 分割} \Rightarrow x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048 = 0$$

$$\zeta(2) \text{ 7 分割} \Rightarrow x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192 = 0$$

.....

上記左辺式を 変数変換 ( $x=1/t^2$ ) して得られる第一種チェビシエフ多項式  $f(x)$  の  $y=f(x)$  は、チェビシエフの微分方程式  $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y=0$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) の一連の解となる。上記一連の代数方程式の根（解）は、“全て実根”であり、その解は ζ(2) の分身の値（特殊値）となる。例えば  $x^3 - 18x^2 + 48x - 32=0$  の三根は、Z(2) 3 分身の特殊値と一致する。

=====

さて、②の方程式の解（Z(2) 7 分身の値）を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）は存在するでしょうか？それは存在し、次となります。（ $G_{Z(2)}$  の 7 は 7 次を意味する）

$$G_{7Z(2)} = (1/2) \begin{bmatrix} \alpha 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta 1 \\ 0 & \alpha 2 & 0 & 0 & 0 & \beta 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha 3 & 0 & \beta 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta 3 & 0 & \alpha 3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta 2 & 0 & 0 & 0 & \alpha 2 & 0 \\ \beta 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 1 \end{bmatrix}$$

極めて美しい形です。ここで、 $\alpha 1, \beta 1, \alpha 2, \beta 2, \alpha 3, \beta 3$ は以下の通りです。

$$\alpha 1 = 1/\cos^2(13\pi/28) + 1/\cos^2(\pi/28), \quad \beta 1 = 1/\cos^2(13\pi/28) - 1/\cos^2(\pi/28) \quad \text{-----}\textcircled{3}-1$$

$$\alpha 2 = 1/\cos^2(11\pi/28) + 1/\cos^2(3\pi/28), \quad \beta 2 = -1/\cos^2(11\pi/28) + 1/\cos^2(3\pi/28) \quad \text{-----}\textcircled{3}-2$$

$$\alpha 3 = 1/\cos^2(9\pi/28) + 1/\cos^2(5\pi/28), \quad \beta 3 = 1/\cos^2(9\pi/28) - 1/\cos^2(5\pi/28) \quad \text{-----}\textcircled{3}-3$$

冒頭の予想の通り、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっていることを確認ください。

$G_{7Z(2)}$ の固有方程式は、 $x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192 = 0$ （固有値 $\lambda$ と自明でない固有ベクトルの存在条件から得られる）となり、②に一致する。その七つの解(固有値) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ は当然ながら $Z(2)$  7分身の値に一致する。固有値と固有ベクトルを以下に示す。

$$\text{固有値 } \lambda_1 = 1/\{\cos(13\pi/28)\}^2 = (\alpha 1 + \beta 1)/2 \text{ に対応する固有ベクトル } p_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda_2 = 1/\{\cos(11\pi/28)\}^2 = (\alpha 2 - \beta 2)/2 \text{ に対応する固有ベクトル } p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda_3 = 1/\{\cos(9\pi/28)\}^2 = (\alpha 3 + \beta 3)/2 \text{ に対応する固有ベクトル } p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda_4 = 1/\{\cos(7\pi/28)\}^2 = 2 \text{ に対応する固有ベクトル } p_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda_5 = 1 / \{\cos(5\pi/28)\}^2 = (\alpha_3 - \beta_3)/2 \text{ に対応する固有ベクトル } p_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda_6 = 1 / \{\cos(3\pi/28)\}^2 = (\alpha_2 + \beta_2)/2 \text{ に対応する固有ベクトル } p_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda_7 = 1 / \{\cos(\pi/28)\}^2 = (\alpha_1 - \beta_1)/2 \text{ に対応する固有ベクトル } p_7 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ここで、 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ は上方③-1, ③-2, ③-3の値である。固有ベクトル  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ は互いに直交する。この固有ベクトルは、(その 1 1 1) での  $L(1)$  7 分身の  $G7_{L(1)}$  の固有ベクトルと完全に一致している。これも興味深い事実です。

$G7_{Z(2)}$  を分身たち  $B1 \sim B7$  で表現したものを示します。

$$G7_{Z(2)} = (392/\pi^2) \begin{bmatrix} B1 + B7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B1 - B7 \\ 0 & B2 + B6 & 0 & 0 & 0 & -B2 + B6 & 0 \\ 0 & 0 & B3 + B5 & 0 & B3 - B5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B4 + B4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B3 - B5 & 0 & B3 + B5 & 0 & 0 \\ 0 & -B2 + B6 & 0 & 0 & 0 & B2 + B6 & 0 \\ B1 - B7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B1 + B7 \end{bmatrix}$$

対角成分は、分身たち  $(B1, B2 \cdots B7)$  から構成されていることが一目瞭然でわかります。

$B1 + B2 + B3 + B4 + B5 + B6 + B7 = Z(2) = \pi^2/8$  であることと合わせて上記を味わってください。なお、真ん中の  $B4 + B4$  は、 $2B4$  とせず、あえて “ $B4 + B4$ ” としました。

左上から右下への対角成分では、7 分身から 4 分身 ( $B1 + B7, B2 + B6, B3 + B5, B4 + B4$ ) が得られ、逆に 4 分身が 7 分身に分かれることを表現しています ( $B4$  は  $Z(2)$  そのものであり勘定に入れなくても OK なのですが)。すなわち 左上から右下への対角成分は、ゼータがどんなふうに分解していくかの分解の様子 (構造) を表現している。

$G7_{Z(2)}$  を再掲します。

$$G_{7_{Z(2)}} = (1/2) \begin{bmatrix} \alpha 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta 1 \\ 0 & \alpha 2 & 0 & 0 & 0 & \beta 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha 3 & 0 & \beta 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta 3 & 0 & \alpha 3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta 2 & 0 & 0 & 0 & \alpha 2 & 0 \\ \beta 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 1 \end{bmatrix}$$

ここで、 $\alpha 1, \beta 1, \alpha 2, \beta 2, \alpha 3, \beta 3$ は以下の通り。

$$\alpha 1 = 1/\cos^2(13\pi/28) + 1/\cos^2(\pi/28), \quad \beta 1 = 1/\cos^2(13\pi/28) - 1/\cos^2(\pi/28) \quad \text{-----}\textcircled{3}-1$$

$$\alpha 2 = 1/\cos^2(11\pi/28) + 1/\cos^2(3\pi/28), \quad \beta 2 = -1/\cos^2(11\pi/28) + 1/\cos^2(3\pi/28) \quad \text{-----}\textcircled{3}-2$$

$$\alpha 3 = 1/\cos^2(9\pi/28) + 1/\cos^2(5\pi/28), \quad \beta 3 = 1/\cos^2(9\pi/28) - 1/\cos^2(5\pi/28) \quad \text{-----}\textcircled{3}-3$$

さらに今回は、 $G_{7_{Z(2)}}$  の逆行列  $G_{7_{Z(2)}}^{-1}$  も求めたので以下に示します。

[ $G_{7_{Z(2)}}$  の逆行列  $G_{7_{Z(2)}}^{-1}$ ]

$$G_{7_{Z(2)}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ここで、 $a = -(1/2)\cos(\pi/14)$ ,  $b = (1/2)\cos(3\pi/14)$ ,  $c = -(1/2)\cos(5\pi/14)$  です。

左上から右下への対角成分がすべて 1/2になるという簡明な形になりました。

$G_{7_{Z(2)}} G_{7_{Z(2)}}^{-1} = G_{7_{Z(2)}}^{-1} G_{7_{Z(2)}} = E$  (単位行列) となることは、手計算で容易に確認できます。

今回、 $Z(2)$  7 分身（つまり  $(2)$  7 分身）の値を固有値にもつ実対称行列  $G_{7_{Z(2)}}$  と固有ベクトルを求め、さらに逆行列  $G_{7_{Z(2)}}^{-1}$  を求めました。6 分身までと同じく 7 分身の  $G_{7_{Z(2)}}$  もその逆行列も、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっていることを確認ください。

以上。

2019. 7. 13 杉岡幹生

2019. 12. 27 改訂 (rev1. 01) 中心対称行列という言葉削除し、その関連の記述を変更。文字フォントを変更。