＜　L(1)分割の微分方程式　その２＞

L(1)分割の微分方程式を(作用素)y=(固有値)y の形に変形できたので報告します。（その１１２）で示した L(1)分割の微分方程式をまず示します。

$$(x^2+1)y'' -2(n-1)xy' + n(n-1)y=0 \qquad (n=1,2,3\cdot\cdot) \qquad \text{-----①}$$

これは、２階の変数係数の線形の常微分方程式です。次の一連のパスカル三角形の二項係数を係数にもつ固有関数 $y= f_n(x)$は①の特殊解となります。そして固有方程式 $f_n(x)=0$ が L(1)“n 分割”の分身(分割級数)の値を解に持つことは、これまで見てきた通りです。

$y=f_1(x)=x-1$
$y=f_2(x)=x^2 -2x -1$
$y=f_3(x)=x^3 -3x^2 -3x +1$
$y=f_4(x)=x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1$
$y=f_5(x)=x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1$
$y=f_6(x)=x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1$
$y=f_7(x)=x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1$
・・・・

さて、①を(作用素)y=(固有値)y のような形で表現すると次のようになります。微分の´を d/dx で表現しました。

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\}=n(1-n)y \qquad \text{------②}$$

左辺の指数の n と 1-n と右辺の n(1-n)に着目すると美しい形です。このように作用素に直接 n がくっついているものは公式集にはほとんどなく、一種異様な感じがあり、②は特別な微分方程式という印象です。

さて、①（または②）を発見するのに今回非常に長い時間がかかりました。どういうふうにしてこれに到達したのか、その道筋を簡潔に時系列で記します。

****
＜発見の経緯＞

●ζ(2)分割のチェビシェフ微分方程式はすぐ発見できたので、L(1)分割もすぐに出ると思いました。２月のことです。L(1)分割もチェビシェフの類似形に違いないと試行錯誤でやりましたが、だめでした。

●この課題の難しい点は、n=1, 2, 3・・と無限系列が関係することです。単発の関数からその微分方程式を求める問題だったら簡単ですが、これはそうではない。

●ある時、ζ(2)分割のチェビシェフ微分方程式の解に関係する“チェビシェフ多項式”が、cos(nA)のコサインの n 倍角の公式に関係することに着目しました。L(1)の分割級数(分身たち)は tan に関係する。もしかしたらパスカル固有方程式（上記 fn(x)=0）は、tan の n 倍角の公式に関係あるかも？と思い、公式集を見ると

tan(nA)＝(分子)/(分母)の分子と分母を合わせるとパスカル三角形が出る！と分かりました。ここで光が見えました。例えば、$\tan 3A=(3\tan A-\tan^3 A)/(1-3\tan^2 A)$で、

(分母) -(分子)＝$(1-3\tan^2 A)-(3\tan A-\tan^3 A)=\tan^3 A-3\tan^2 A-3\tan A+1$

となり、パスカルの三角形が出ています！⇒上方の $f_3(x)$と比較してください。

●ところが分母と分子という変わった位置関係にあるため、ここからどう進めたらよいかわからない。しばらく暗闇を進んだ。そうするうちに 1-tan(nA)とすると、その分子のみにパスカル三角形が出ると気づきました。例えば、$1-\tan(3A)＝(\tan^3 A-3\tan^2 A-3\tan A+1)/(1-3\tan^2 A)$であり、分子に $f_3(x)$が出ている！

●変数変換から、例えば 3 分割なら、$y=(x^3-3x^2-3x+1)/(x^3-3x)$を解にもつ微分方程式が出ました。任意の n で出したのが、（その１１１）で示した非線形の微分方程式です。

●しかし線形の微分方程式でないと、チェビシェフのように固有値問題の形の理想形にできない。

そうするうちに、y=u/v の u のみの微分方程式を求めればいけるかも・・と気づく。非線形の微分方程式に y=u/v を放り込み、u のみ残して、v の姿を消せばよいはず・・。しかしそれも色々と困難が出た。

試行錯誤の末、n=2 の特殊ケースで

$(x^2+1)u''-2xu'＝-2u$

という形に行き着いた。他の n ではうまくいかない。しかしこの n＝2 の特殊ケースから、すべての n で

$(x^2+1)u''+axu'＝bu$

の形になっているはず！と確信し、①に到達できた。①から②はすぐに出た。

****

このような複雑な経路を経て①、②に辿り着きました。“存在すること”は予想できていたのですが、４カ月以上もかかるとは思いもしませんでした。しかしきちんと予想通り存在してくれていたので、うれしい限りです。②の形は素晴らしい。これで L(1)側とζ(2)側の役者が揃いました。

①と②を再掲します。

$$(x^2+1)y''-2(n-1)xy'+n(n-1)y＝0 \qquad (n=1,2,3\cdot\cdot) \qquad \text{-----①}$$

$$(x^2+1)^n\frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\}＝n(1-n)y \qquad \text{------②}$$

今回、エルミート行列の固有値問題の類推から、この①（または②）を導出できました。この微分方程式の解の固有関数 $y=f_n(x)$は、エルミート行列の固有ベクトルと当然ながら対応します。したがって、多項式 $f_n(x)$と $f_m(x)$は直交関係にあります。$f_n(x)\times f_m(x)$はある種の積分でゼロになるはずです。その辺はまだ見ていませんが、そうなっていることは自明です。

最後に予想と問題を記しておきます。

==

＜予想と問題＞

L(1)分割の微分方程式は、L(3)分割、L(5)分割・・の微分方程式と兄弟のような関係があるはずである。一方、ζ(2)分割の微分方程式は、ζ(4)分割、ζ(6)分割・・の微分方程式とはまた兄弟のようになっているはず。

前者の一族と後者の一族はどのようにつながっているか、また違いはなにか？
その辺りを追求せよ。

==

以上。

2019.7.6　杉岡幹生