＜　L(1)の１３分割　＞

次の L(1)の１３分割における１３個の分割級数（１３分身）を求めましたので、報告します。

L(1)＝1 -1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/11 +1/13 -1/15 +1/17 -1/19 +1/21 -1/23 +・・＝π/4

では、結果を示します。

＝＝＝

■L(1)１３分割

A1 ＝　1 - 1/51 +1/53 -1/103 +1/105 -1/155　+ ・・＝(π/52)tan(25π/52)
A2 ＝ 1/3 - 1/49 +1/55 -1/101 +1/107 -1/153 + ・・ ＝(π/52)tan(23π/52)
A3 ＝ 1/5 - 1/47 +1/57 -1/99 +1/109 -1/151　+ ・・ ＝(π/52)tan(21π/52)
A4 ＝ 1/7 - 1/45 +1/59 -1/97 +1/111 -1/149　+ ・・ ＝(π/52)tan(19π/52)
A5 ＝ 1/9 - 1/43 +1/61 -1/95 +1/113 -1/147　+ ・・ ＝(π/52)tan(17π/52)
A6 ＝1/11 - 1/41 +1/63 -1/93 +1/115 -1/145　+ ・・ ＝(π/52)tan(15π/52)
A7 ＝1/13 - 1/39 +1/65 -1/91 +1/117 -1/143　+ ・・ ＝(π/52)tan(13π/52)
A8 ＝1/15 - 1/37 +1/67 -1/89 +1/119 -1/141　+ ・・ ＝(π/52)tan(11π/52)
A9 ＝1/17 - 1/35 +1/69 -1/87 +1/121 -1/139　+ ・・ ＝(π/52)tan(9π/52)
A10＝1/19 - 1/33 +1/71 -1/85 +1/123 -1/137　+ ・・ ＝(π/52)tan(7π/52)
A11＝1/21 - 1/31 +1/73 -1/83 +1/125 -1/135　+ ・・ ＝(π/52)tan(5π/52)
A12＝1/23 - 1/29 +1/75 -1/81 +1/127 -1/133　+ ・・ ＝(π/52)tan(3π/52)
A13＝1/25 - 1/27 +1/77 -1/79 +1/129 -1/131　+ ・・ ＝(π/52)tan(π/52)

A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6 +A7 -A8 +A9 -A10 +A11 -A12 +A13＝L(1)＝π/4 となります。

A1, -A2, A3, -A4, A5, -A6, A7, -A8, A9, -A10, A11, -A12, A13 が L(1)の１３分身です。

念のため、Excel マクロで数値検証を行いましたが、全て左辺の級数は右辺値に収束しました。また右辺値に対して“A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6 +A7 -A8 +A9 -A10 +A11 -A12 +A13”を計算すると、π/4 に一致しました。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上の分割級数の導出過程を簡単に述べます。

次の①の三角関数タンジェントの部分分数展開式を用います。

$1/(1^2-x^2) +1/(3^2-x^2) +1/(5^2-x^2) + \cdots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$　----①

この①の x に特定の値を代入することで、L(1)の分割級数が次々に求まっていきます。以下の通り。

x に 25/26 を代入すると、A1 が得られる。
x に 23/26 を代入すると、A2 が得られる。
x に 21/26 を代入すると、A3 が得られる。
x に 19/26 を代入すると、A4 が得られる。
x に 17/26 を代入すると、A5 が得られる。
x に 15/26 を代入すると、A6 が得られる。
x に 13/26 を代入すると、A7 が得られる。
x に 11/26 を代入すると、A8 が得られる。
x に 9/26 を代入すると、A9 が得られる。
x に 7/26 を代入すると、A10 が得られる。
x に 5/26 を代入すると、A11 が得られる。
x に 3/26 を代入すると、A12 が得られる。
x に 1/26 を代入すると、A13 が得られる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように L(1)の１３分身が求まりました。その美しい秩序を味わってください。

A7 は <u>L(1)そのもの</u>となっていることにも注意してください。

A7 ＝1/13 - 1/39 +1/65 -1/91 +1/117 -1/143 ＋ ・・ ＝(π/52)tan(13π/52)

これは冒頭の L(1)そのものです。面白いことです。

以上。

2019.6.14　杉岡幹生