

< L(1)の11分割 >

次のL(1)の11分割における11個の分割級数(11分身)を求めましたので、報告します。

$$L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17 - 1/19 + 1/21 - 1/23 + \dots = \pi/4$$

では、結果を示します。

=====

■L(1)11分割

- A1 = $1 - 1/43 + 1/45 - 1/87 + 1/89 - 1/131 + \dots = (\pi/44)\tan(21\pi/44)$
- A2 = $1/3 - 1/41 + 1/47 - 1/85 + 1/91 - 1/129 + \dots = (\pi/44)\tan(19\pi/44)$
- A3 = $1/5 - 1/39 + 1/49 - 1/83 + 1/93 - 1/127 + \dots = (\pi/44)\tan(17\pi/44)$
- A4 = $1/7 - 1/37 + 1/51 - 1/81 + 1/95 - 1/125 + \dots = (\pi/44)\tan(15\pi/44)$
- A5 = $1/9 - 1/35 + 1/53 - 1/79 + 1/97 - 1/123 + \dots = (\pi/44)\tan(13\pi/44)$
- A6 = $1/11 - 1/33 + 1/55 - 1/77 + 1/99 - 1/121 + \dots = (\pi/44)\tan(11\pi/44)$
- A7 = $1/13 - 1/31 + 1/57 - 1/75 + 1/101 - 1/119 + \dots = (\pi/44)\tan(9\pi/44)$
- A8 = $1/15 - 1/29 + 1/59 - 1/73 + 1/103 - 1/117 + \dots = (\pi/44)\tan(7\pi/44)$
- A9 = $1/17 - 1/27 + 1/61 - 1/71 + 1/105 - 1/115 + \dots = (\pi/44)\tan(5\pi/44)$
- A10 = $1/19 - 1/25 + 1/63 - 1/69 + 1/107 - 1/113 + \dots = (\pi/44)\tan(3\pi/44)$
- A11 = $1/21 - 1/23 + 1/65 - 1/67 + 1/109 - 1/111 + \dots = (\pi/44)\tan(\pi/44)$

$$A1 - A2 + A3 - A4 + A5 - A6 + A7 - A8 + A9 - A10 + A11 = L(1) = \pi/4 \text{ となります。}$$

A1, -A2, A3, -A4, A5, -A6, A7, -A8, A9, -A10, A11 が L(1)の11分身です。

念のため、Excelマクロで数値検証を行いました。全て左辺の級数は右辺値に収束しました。また右辺値に対して“A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6 +A7 -A8 +A9 -A10 +A11”を計算すると、π/4に一致しました。

=====

上の分割級数の導出過程を簡単に述べます。

次の①の三角関数タンジェントの部分分数展開式を用います。

$$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \dots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2) \text{ ----①}$$

この①のxに特定の値を代入することで、L(1)の分割級数が次々に求まっていきます。以下の通り。

xに 21/22 を代入すると、A1 が得られる。
xに 19/22 を代入すると、A2 が得られる。
xに 17/22 を代入すると、A3 が得られる。
xに 15/22 を代入すると、A4 が得られる。
xに 13/22 を代入すると、A5 が得られる。
xに 11/22 を代入すると、A6 が得られる。
xに 9/22 を代入すると、A7 が得られる。
xに 7/22 を代入すると、A8 が得られる。
xに 5/22 を代入すると、A9 が得られる。
xに 3/22 を代入すると、A10 が得られる。
xに 1/22 を代入すると、A11 が得られる。

=====

L(1)の 1 1 分身が求まりました。その美しい秩序を味わってください。

A6 はじつは L(1)そのもの となっていることに注意してください。

$$A6 = 1/11 - 1/33 + 1/55 - 1/77 + 1/99 - 1/121 + \dots = (\pi/44)\tan(11\pi/44)$$

これは L(1)そのものです。面白いですね。

以上。

2019.6.1 杉岡幹生