＜　ζ(2)の９分割　＞

今回はもと来ていた道に立ち戻り、Z(2)すなわちζ(2)の９分割を求めます。Z(2)は次の関係からζ(2)と本質的に同じものです。

＝＝

$Z(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2 + \cdots$

$= 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 \cdots - (1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \cdots)$

$= \zeta(2) - (1/2^2)\zeta(2)$

$= (3/4)\zeta(2) = \pi^2/8$

では、Z(2)９分割の９分身(分割級数)を示します。

＝＝

■Z(2)９分割

$B1 = 1 + 1/35^2 + 1/37^2 + 1/71^2 + 1/73^2 + 1/107^2 + \cdots = (\pi/36)^2/\{\cos(17\pi/36)\}^2$

$B2 = 1/3^2 + 1/33^2 + 1/39^2 + 1/69^2 + 1/75^2 + 1/105^2 + \cdots = (\pi/36)^2/\{\cos(15\pi/36)\}^2$

$B3 = 1/5^2 + 1/31^2 + 1/41^2 + 1/67^2 + 1/77^2 + 1/103^2 + \cdots = (\pi/36)^2/\{\cos(13\pi/36)\}^2$

$B4 = 1/7^2 + 1/29^2 + 1/43^2 + 1/65^2 + 1/79^2 + 1/101^2 + \cdots = (\pi/36)^2/\{\cos(11\pi/36)\}^2$

$B5 = 1/9^2 + 1/27^2 + 1/45^2 + 1/63^2 + 1/81^2 + 1/99^2 + \cdots = (\pi/36)^2/\{\cos(9\pi/36)\}^2$

$B6 = 1/11^2 + 1/25^2 + 1/47^2 + 1/61^2 + 1/83^2 + 1/97^2 + \cdots = (\pi/36)^2/\{\cos(7\pi/36)\}^2$

$B7 = 1/13^2 + 1/23^2 + 1/49^2 + 1/59^2 + 1/85^2 + 1/95^2 + \cdots = (\pi/36)^2/\{\cos(5\pi/36)\}^2$

$B8 = 1/15^2 + 1/21^2 + 1/51^2 + 1/57^2 + 1/87^2 + 1/93^2 + \cdots = (\pi/36)^2/\{\cos(3\pi/36)\}^2$

$B9 = 1/17^2 + 1/19^2 + 1/53^2 + 1/55^2 + 1/89^2 + 1/91^2 + \cdots = (\pi/36)^2/\{\cos(\pi/36)\}^2$

$B1 + B2 + B3 + B4 + B5 + B6 + B7 + B8 + B9 = Z(2) = \pi^2/8$ である。<u>B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8, B9 がZ(2)の９分身である</u>。

念のため、上記式に対し Excel マクロで数値検証を実行しましたが、全て左辺の級数は右辺値に収束しました。また<u>右辺値に対して</u>“B1 +B2 +B3 +B4 +B5+B6 +B7 +B8 +B9”を計算すると、$\pi^2/8$ に一致しました。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上の分割級数の導出過程を簡単に述べます。

三角関数タンジェントの部分分数展開式を G[1](x)で表現すると、次となります。

$G[1](x) = 1/(1^2 - x^2) + 1/(3^2 - x^2) + 1/(5^2 - x^2) + \cdots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを１回微分して次の G[2](x)を得ます。

$G[2](x) = 1/(1^2 - x^2)^2 + 1/(3^2 - x^2)^2 + 1/(5^2 - x^2)^2 + \cdots = (\pi/(4x))^2/\{\cos(\pi x/2)\}^2 + \mathrm{Others}(x)$

ここで右辺の Others(x)はじつは $\mathrm{Others}(x) = -(\pi/(8x^3))\tan(\pi x/2)$ですが、今回は無視してよい個所なので Others(x)としました。

ζ(2)すなわちZ(2)では、<u>このG[2](x)を使います</u>。

G[2](x)のxに特定の値を代入することで、Z(2)の分割級数が次々に求まっていきます。以下の通り。

G[2](x)のxに17/18を代入すると、B1が得られる。
G[2](x)のxに15/18を代入すると、B2が得られる。
G[2](x)のxに13/18を代入すると、B3が得られる。
G[2](x)のxに11/18を代入すると、B4が得られる。
G[2](x)のxに 9/18を代入すると、B5が得られる。
G[2](x)のxに 7/18を代入すると、B6が得られる。
G[2](x)のxに 5/18を代入すると、B7が得られる。
G[2](x)のxに 3/18を代入すると、B8が得られる。
G[2](x)のxに 1/18を代入すると、B9が得られる。

注記：値を代入されたG[2](x)の左辺からL(1)分割級数が出ますが、それは今回は興味がないので無視します。右辺からも左辺のL(1)分割級数に対応した値がOthers(x)から出ますがそれも無視します。興味がないものはOthers(x)に押し込んで無視するのです。なぜこんなことをするかと言うと、高次のζ(4)やL(5)やζ(6)・・などを求める際にこの方法を使うと、計算量を劇的に減らせるからです。ζ(2)分割ではまだその有難味はわかりませんが、高次の計算ではこのアイディアが絶大な威力を発揮します。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにζ(2)すなわちZ(2)の９分身たちが求まりました。得られた式は、すばらしい秩序から成り立っており、いくら眺めても飽きません。

G[1](x)やG[2](x)の「部分分数展開式」が、「ゼータの香りの漂う公式」と双対的に同値関係にあることは以前述べた通りです。すなわち、どちらからでもゼータの分割級数（分身たち）がふって湧いてきます。

上では９分割を見ましたが、これまで見てきたようにL(2n-1)やζ(2n)が<u>任意分割可能（n分割可能！）</u>であることはやはりすごいことであり、それを再度強調しておきたいと思います。

以上。

2019.5.26　杉岡幹生