＜Z(2) １分割から６分割における実対称行列(エルミート行列)の逆行列＞ rev1.01

今回は、Z(2)（次の関係でζ(2)そのもの）の１分割から６分割に対応する実対称行列(エルミート行列)の逆行列を示します。

$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots$

$\quad=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+1/7^2\cdots-(1/2^2+1/4^2+1/6^2+\cdots)$

$\quad=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8$

[Z(2)分割-実対称行列 予想]

「Z(2)のｎ分身の特殊値を解にもつ代数方程式」＝「実対称行列（エルミート行列）の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

ここで、“ｎ分身”の意味は、タンジェント部分分数展開式を微分した次式に、m/(2n)を代入して求めたｎ分割のｎ個の分身たちを指す。(nは１以上の整数。m=1, 3, 5・・, 2n−1)

$1/(1^2-x^2)^2+1/(3^2-x^2)^2+1/(5^2-x^2)^2+\cdots=(\pi/(4x))^2/\{\cos(\pi x/2)\}^2-\{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2)$

上記に関してこれまでZ(2)の各分割の分身たち（分割級数）の値を固有値にもつ行列を求めてきましたが、それらの逆行列を見ていきます。１分割（Z(2)そのもの）の行列は自明なので示してきませんでしたが、統一的な観点からそれも示します。

注記：例えばZ(2)２分割の“２分身の値”と言った場合、下記の$(\pi/8)^2$ を除いた$1/\{\cos(\ )\}^2$ の値のみを指します。本質のみを見たいのでそれで十分。その分身の値が、第一種チェビシェフ多項式の代数方程式の解となることは、(その８６) 他多くの所で述べてきた通りです。

＝＝＝

■Z(2)２分割

$A1=1+1/7^2+1/9^2+1/15^2+1/17^2+1/23^2+\cdots\cdots=(\pi/8)^2/\{\cos(3\pi/8)\}^2$

$A2=1/3^2+1/5^2+1/11^2+1/13^2+1/19^2+1/21^2+\cdots=(\pi/8)^2/\{\cos(\pi/8)\}^2$

$A1+A2=\pi^2/8=Z(2)$ である。 A1, A2がZ(2)２分身である。

$1/\{\cos()\}^2$の部分は次の通り。$1/\{\cos(3\pi/8)\}^2=4+2\sqrt{2}$,　$1/\{\cos(\pi/8)\}^2=4-2\sqrt{2}$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

では、各分割における逆行列を示します。

[1 分割]

（その３１）で見たＺ(2)１分身（すなわちＺ(2)そのもの）の値を固有値としてもつ実対称行列 $G1_{Z(2)}$とその逆行列 $G1_{Z(2)}^{-1}$ を示す。

$$G1_{Z(2)}=[2]$$

[逆行列 $G1_{Z(2)}^{-1}$]

$$G1_{Z(2)}^{-1}=[1/2]$$

$G1_{Z(2)}\ G1_{Z(2)}^{-1}=G1_{Z(2)}^{-1}\ G1_{Z(2)}\ =E$(単位行列)$=[1]=1$ となる。

なお、（その３１）の１分割の内容は次の通り。

****

■Ｚ(2)１分割

$Z(2)=1\ +1/3^2\ +1/5^2\ +1/7^2\ +1/9^2\ +1/11^2\ +\cdots=(\pi/4)^2/\{\cos(\pi/4)\}^2\ =\pi^2/8$

****

[２分割]

Ｚ(2)２分身の値を固有値としてもつ実対称行列 $G2_{Z(2)}$とその逆行列 $G2_{Z(2)}^{-1}$ を示す。（その９８）と関連。

$$G2_{Z(2)}=\begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

[逆行列 $G2_{Z(2)}^{-1}$]

$$G2_{Z(2)}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$G2_{Z(2)}\ G2_{Z(2)}^{-1}=G2_{Z(2)}^{-1}\ G2_{Z(2)}\ =E$(単位行列)$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$となる。

[３分割]

Ｚ(2)３分身の値を固有値としてもつ実対称行列 $G3_{Z(2)}$とその逆行列 $G3_{Z(2)}^{-1}$ を示す。（その９８）と関連

$$G3_{Z(2)}=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 4\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 4\sqrt{3} & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

［逆行列 $G3_{Z(2)}{}^{-1}$］

$$G3_{Z(2)}{}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$G3_{Z(2)}\ G3_{Z(2)}{}^{-1}=G3_{Z(2)}{}^{-1}\ G3_{Z(2)}\ =E$(単位行列)$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$となる。

［４分割］

Z(2) ４分身の値を固有値としてもつ実対称行列 $G4_{Z(2)}$とその逆行列 $G4_{Z(2)}{}^{-1}$ を示す。（その９９）と関連

$$G4_{Z(2)}=\begin{bmatrix} 8+4\sqrt{2} & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 8-4\sqrt{2} & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 8-4\sqrt{2} & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 8+4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ここで、$\alpha=4\sqrt{}(2+\sqrt{}2)\ +2\sqrt{}(4\ +2\sqrt{}2)$,　 $\beta=-4\sqrt{}(2\ -\sqrt{}2)\ +2\sqrt{}(4\ -2\sqrt{}2)$

［逆行列 $G4_{Z(2)}{}^{-1}$］

$$G4_{Z(2)}{}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{(2}+\sqrt{2})}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$G4_{Z(2)}\ G4_{Z(2)}{}^{-1}=G4_{Z(2)}{}^{-1}\ G4_{Z(2)}\ =E$(単位行列)となる。

［５分割］

Z(2) ５分身の値を固有値としてもつ実対称行列 $G5_{Z(2)}$とその逆行列 $G5_{Z(2)}{}^{-1}$ を示す。（その１０1）と関連。

$$G5_{Z(2)}=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

ここで、$\alpha=12+4\sqrt{5}$，$\beta=(\sqrt{5}+3)\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$，　$a=12-4\sqrt{5}$，$b=(\sqrt{5}-3)\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

［逆行列 $G_{5Z(2)}{}^{-1}$］

$$G5_{Z(2)}{}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{8}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{8} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{-\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$G5_{Z(2)}\ G5_{Z(2)}{}^{-1}=G5_{Z(2)}{}^{-1}\ G5_{Z(2)}=E$（単位行列）となる。

［６分割］

Z(2)６分身の値を固有値としてもつ実対称行列 $G6_{Z(2)}$とその逆行列 $G6_{Z(2)}{}^{-1}$ を示す。（その１０３）と関連。

$$G6_{Z(2)}=\begin{bmatrix}\alpha1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta1\\ 0 & \alpha2 & 0 & 0 & \beta2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha3 & \beta3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta3 & \alpha3 & 0 & 0\\ 0 & \beta2 & 0 & 0 & \alpha2 & 0\\ \beta1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha1\end{bmatrix}$$

ここで、$\alpha1$, $\beta1$, $\alpha2$, $\beta2$, $\alpha3$, $\beta3$は以下の通り。

$\alpha1=8(2+\sqrt{3})$，$\beta1=4(2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}$
$\alpha2=4$，　　　　$\beta2=2\sqrt{2}$
$\alpha3=8(2-\sqrt{3})$，$\beta3=4(2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}$

[逆行列 $G6_{Z(2)}{}^{-1}$]

$$G6_{Z(2)}{}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{(2-\sqrt{3})}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{(2-\sqrt{3})}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$G6_{Z(2)}\ G6_{Z(2)}{}^{-1}=G6_{Z(2)}{}^{-1}\ G6_{Z(2)}\ =E$(単位行列)となる。

[逆行列を見て気づくこと]

（１）　１～６分割の逆行列は、元の行列同様、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となり、対角成分以外はすべてゼロになった。７分割以上でもそうなるに違いない。

（２）　今回見た逆行列では、左上から右下に向う対角成分が全て 1/2 となっている。７分割以上でもそうなるに違いない。

以上。

2019.5.22　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その周辺の説明を変更。文字フォントを変更。