<L(1) １分割から６分割における実対称行列(エルミート行列)の逆行列)> rev1.01

今回は、次のＬ(1)の１分割から６分割に対応する実対称行列（エルミート行列）の逆行列を示します。

L(1)＝1 -1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/11 +1/13 -1/15 +1/17 -1/19 +1/21 -1/23 +・・＝π/4

[L(1)分割-実対称行列 予想]

「L(1)のn分身の特殊値を解にもつ代数方程式」＝「実対称行列(エルミート行列)の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

ここで“n 分身”の意味は、次のタンジェント部分分数展開式の x に m/(2n)を代入して求めた n 分割の n 個の分身たちを指す。(n は１以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n-1)

$1/(1^2 -x^2)$ $+1/(3^2 -x^2)$ $+1/(5^2 -x^2)$ +・・＝(π/(4x))tan(πx/2)

上記に関し、これまで各分割の分身たち（分割級数）の値を固有値にもつ行列を求めてきましたが、それらの逆行列を見ていきます。１分割（L(1)そのもの）の行列は自明なので示してきませんでしたが、統一的な観点からそれも示します。

注記：例えばＬ(1)２分割の“２分身の値”と言った場合、下記の(π/8)を除いた tan()の値のみを指します。（その５２）で説明した通り、本質のみを見たいのでそれで十分。

＝＝＝
■L(1)２分割

A1＝ 1 -1/7 +1/9 -1/15 + 1/17 -1/23 +・・ ＝(π/8)tan(3π/8)

A2＝1/3 -1/5 +1/11 -1/13 + 1/19 -1/21 +・・＝(π/8) tan(π/8)

A1 -A2＝π/4＝L(1)である。A1, A2 がＬ(1)２分身である。

tan()の部分は右の通り。 tan(3π/8)＝1 +√2、tan(π/8)＝-1 +√2

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

では、各分割における逆行列を示します。

[1 分割]

L(1)１分身（L(1)そのもの）の値を固有値としてもつ実対称行列 $G1_{L(1)}$ とその逆行列 $G1_{L(1)}{}^{-1}$ を示す。

$$G1_{L(1)}=[1]$$

［逆行列 $G1_{L(1)}^{-1}$］

$$G1_{L(1)}^{-1}=[1]$$

$G1_{L(1)}\ G1_{L(1)}^{-1}=G1_{L(1)}^{-1}\ G1_{L(1)}\ =E$（単位行列）$=[1]=1$ となる。

［２分割］

（その９６）で見たＬ(1)２分身の値を固有値としてもつ実対称行列 $G2_{L(1)}$とその逆行列 $G2_{L(1)}^{-1}$ を示す。

$$G2_{L(1)}=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$$

［逆行列 $G2_{L(1)}^{-1}$］

$$G2_{L(1)}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -1\end{bmatrix}$$

$G2_{L(1)}\ G2_{L(1)}^{-1}=G2_{L(1)}^{-1}\ G2_{L(1)}\ =E$（単位行列）$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$となる。

［３分割］

（その９６）で見たＬ(1)３分身の値を固有値としてもつ実対称行列 $G3_{L(1)}$とその逆行列 $G3_{L(1)}^{-1}$ を示す。

$$G3_{L(1)}=\begin{bmatrix}2 & 0 & \sqrt{3}\\ 0 & -1 & 0\\ \sqrt{3} & 0 & 2\end{bmatrix}$$

［逆行列 $G3_{L(1)}^{-1}$］

$$G3_{L(1)}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -\sqrt{3}\\ 0 & -1 & 0\\ -\sqrt{3} & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$G3_{L(1)}\ G3_{L(1)}^{-1}=G3_{L(1)}^{-1}\ G3_{L(1)}\ =E$（単位行列）となる。

［４分割］

（その９７）で見たＬ(1)４分身の値を固有値としてもつ実対称行列 $G4_{L(1)}$とその逆行列 $G4_{L(1)}^{-1}$ を示す。

$$G4_{L(1)}=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

ここで $\alpha=1+\sqrt{2}$, $a=1-\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$, $b=\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$ である。
行列内を直接数値で表すと次の通り。

$$G4_{L(1)}=\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{(4+2\sqrt{2})} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & \sqrt{(4-2\sqrt{2})} & 0 \\ 0 & \sqrt{(4-2\sqrt{2})} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{(4+2\sqrt{2})} & 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

[逆行列 $G4_{L(1)}{}^{-1}$]

$$G4_{L(1)}{}^{-1}=\begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ \beta & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

行列内を直接数値で表すと次の通り。

$$G4_{L(1)}{}^{-1}=\begin{bmatrix} -(1+\sqrt{2}) & 0 & 0 & \sqrt{(4+2\sqrt{2})} \\ 0 & -(1-\sqrt{2}) & \sqrt{(4-2\sqrt{2})} & 0 \\ 0 & \sqrt{(4-2\sqrt{2})} & -(1-\sqrt{2}) & 0 \\ \sqrt{(4+2\sqrt{2})} & 0 & 0 & -(1+\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

$G4_{L(1)}\ G4_{L(1)}{}^{-1}=G4_{L(1)}{}^{-1}\ G4_{L(1)}=E$(単位行列)となる。

[５分割]

（その１００）で見たＬ(1)５分身の値を固有値としてもつ実対称行列 $G5_{L(1)}$ とその逆行列 $G5_{L(1)}{}^{-1}$ を示す。

$$G5_{L(1)}=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

ここで $\alpha=1+\sqrt{5}$, $a=1-\sqrt{5}$, $\beta=\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$, $b=\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$ である。
行列内を直接数値で表すと次の通り。

$$G5_{L(1)}=\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{(5+2\sqrt{5})} \\ 0 & 1-\sqrt{5} & 0 & \sqrt{(5-2\sqrt{5})} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{(5-2\sqrt{5})} & 0 & 1-\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{(5+2\sqrt{5})} & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

［逆行列 $G_{5L(1)}{}^{-1}$］

$$G5_{L(1)}{}^{-1}=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & a & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & a & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

行列内を直接数値で表すと次の通り。

$$G5_{L(1)}{}^{-1}=\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{(5+2\sqrt{5})} \\ 0 & 1-\sqrt{5} & 0 & -\sqrt{(5-2\sqrt{5})} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{(5-2\sqrt{5})} & 0 & 1-\sqrt{5} & 0 \\ -\sqrt{(5+2\sqrt{5})} & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$G5_{L(1)}\ G5_{L(1)}{}^{-1}=G5_{L(1)}{}^{-1}\ G5_{L(1)}\ =E$（単位行列）となる。

［６分割］

（その１０２）で見たＬ(1)６分身の値を固有値としてもつ実対称行列 $G6_{L(1)}$とその逆行列 $G6_{L(1)}{}^{-1}$ を示す。

$$G6_{L(1)}=\begin{bmatrix} \alpha 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta 1 \\ 0 & \alpha 2 & 0 & 0 & \beta 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha 3 & \beta 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta 3 & \alpha 3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta 2 & 0 & 0 & \alpha 2 & 0 \\ \beta 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 1 \end{bmatrix}$$

ここで $\alpha1=2+\sqrt{3}$, $\beta1=2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, $\alpha2=-1$, $\beta2=\sqrt{2}$, $\alpha3=2-\sqrt{3}$, $\beta3=2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ である。
行列内を直接数値で表すと、次の通り。

$$G6_{L(1)}=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} & 2\sqrt{(2-\sqrt{3})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{(2-\sqrt{3})} & 2-\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

[逆行列 $G6_{L(1)}{}^{-1}$]

$$G6_{L(1)}{}^{-1}=\begin{bmatrix} -\alpha 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta 1 \\ 0 & -\alpha 2 & 0 & 0 & \beta 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha 3 & \beta 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta 3 & -\alpha 3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta 2 & 0 & 0 & -\alpha 2 & 0 \\ \beta 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha 1 \end{bmatrix}$$

行列内を直接数値で表すと次の通り。

$$G6_{L(1)}{}^{-1}=\begin{bmatrix} -(2+\sqrt{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -(2-\sqrt{3}) & 2\sqrt{(2-\sqrt{3})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{(2-\sqrt{3})} & -(2-\sqrt{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} & 0 & 0 & 0 & 0 & -(2+\sqrt{3}) \end{bmatrix}$$

$G6_{L(1)}\ G6_{L(1)}{}^{-1}=G6_{L(1)}{}^{-1}\ G6_{L(1)}\ =E$（単位行列）となる。

[逆行列を見て気づくこと]

（１） Ｌ（１）１～６分割の<u>逆行列は、元の行列同様、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっていて、対角成分以外はすべてゼロ</u>になった。７分割以上でもそうなるに違いない。

（２） 逆行列とその元の行列は非常に似ている。逆行列は、元の行列の<u>ある対角成分に負号（ー）がつくだけ</u>である。したがってＬ(1)分割に対応する実対称行列が求まれば、その逆行列は容易に推定できる。
注記：一般に高次行列の逆行列を求めることはとてつもなく困難であるが、Ｌ(1)分割に関する限り、その逆行列は<u>簡単に分かる</u>。

以上。

2019.5.19　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その周辺の説明を変更。文字フォントを変更。