＜$\zeta(2)$６分身の値を固有値として持つ実対称行列（エルミート行列）＞ rev1.01

今回は$\zeta(2)$（つまり$Z(2)$）の６分身の値を固有値に持つ実対称行列（エルミート行列）を求めます。

[Z(2)分割-実対称行列 予想]

「Z(2)のｎ分身の特殊値を解にもつ代数方程式」＝「実対称行列（エルミート行列）の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

ここで、“ｎ分身”の意味は、タンジェント部分分数展開式を微分した次式に、m/(2n)を代入して求めたｎ分割のｎ個の分身たちを指す。(ｎは１以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n−1)

$$1/(1^2-x^2)^2+1/(3^2-x^2)^2+1/(5^2-x^2)^2+\cdots=(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2)-(\pi/(8x^3))\tan(\pi x/2)$$

$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots=\pi^2/8$ は、$\zeta(2)$と次の関係にあり、両者は本質的に等しいものです。“Z(s)”という記号は私が独自に使っているものです。

$$\begin{aligned}Z(2)&=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots\\&=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+1/7^2\cdots-(1/2^2+1/4^2+1/6^2+\cdots)\\&=\zeta(2)-(1/2^2)\zeta(2)=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8 \quad\text{-------①}\end{aligned}$$

以下、Z(2)６分身の値を固有値として持つ実対称行列（エルミート行列）を求めていきます。
はじめにZ(2)６分割での６分身を示します。(その６０）から抜粋、$1/\{\cos()\}^2$の値は追記。

＝＝

■Z(2)６分割

$$B1=1+1/23^2+1/25^2+1/47^2+1/49^2+1/71^2+\cdots=(\pi/24)^2/\{\cos(11\pi/24)\}^2$$
$$B2=1/3^2+1/21^2+1/27^2+1/45^2+1/51^2+1/69^2+\cdots=(\pi/24)^2/\{\cos(9\pi/24)\}^2$$
$$B3=1/5^2+1/19^2+1/29^2+1/43^2+1/53^2+1/67^2+\cdots=(\pi/24)^2/\{\cos(7\pi/24)\}^2$$
$$B4=1/7^2+1/17^2+1/31^2+1/41^2+1/55^2+1/65^2+\cdots=(\pi/24)^2/\{\cos(5\pi/24)\}^2$$
$$B5=1/9^2+1/15^2+1/33^2+1/39^2+1/57^2+1/63^2+\cdots=(\pi/24)^2/\{\cos(3\pi/24)\}^2$$
$$B6=1/11^2+1/13^2+1/35^2+1/37^2+1/59^2+1/61^2+\cdots=(\pi/24)^2/\{\cos(\pi/24)\}^2$$

$B1+B2+B3+B4+B5+B6=Z(2)=\pi^2/8$ である。B1, B2, B3, B4, B5, B6がZ(2)の６分身である。
$1/\{\cos()\}^2$の値は以下の通り。

$$(24/\pi)^2B1=1/\{\cos(11\pi/24)\}^2=8(2+\sqrt{3})+4(2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}$$
$$(24/\pi)^2B2=1/\{\cos(9\pi/24)\}^2=4+2\sqrt{2}$$
$$(24/\pi)^2B3=1/\{\cos(7\pi/24)\}^2=8(2-\sqrt{3})+4(2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}$$
$$(24/\pi)^2B4=1/\{\cos(5\pi/24)\}^2=8(2-\sqrt{3})-4(2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}$$
$$(24/\pi)^2B5=1/\{\cos(3\pi/24)\}^2=4-2\sqrt{2}$$
$$(24/\pi)^2B6=1/\{\cos(\pi/24)\}^2=8(2+\sqrt{3})-4(2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}$$

＝＝

６分身の値 B1, B2, B3, B4, B5, B6 の 1/{cos()}^{2}の部分の値を解にもつ代数方程式は次となります。

$x^6 -72x^5 +840x^4 -3584x^3 +6912x^2 -6144x +2048=0$　　--------②

②は 1/{cos(11π/24)}^{2}, 1/{cos(9π/24)}^{2}, 1/{cos(7π/24)}^{2}, 1/{cos(5π/24)}^{2}, 1/{cos(3π/24)}^{2}, 1/{cos(π/24)}^{2}の六つを解に持つ。

ここで、B1, B2, B3, B4 , B5, B6 すなわち、(π/24)^2/{cos(11π/24)}^{2}, (π/24)^2/{cos(9π/24)}^{2}, (π/24)^2/{cos(7π/24)}^{2}, (π/24)^2/{cos(5π/24)}^{2}, (π/24)^2/{cos(3π/24)}^{2}, (π/24)^2/{cos(π/24)}^{2}を解にもつ方程式を出すことも当然できますが、それと②は本質的に同じなので、②を採用します。これまでと同じ方針で進めます。

まとめます。

＜Z(2)６分身の値を解にもつ代数方程式＞

$x^6 -72x^5 +840x^4 -3584x^3 +6912x^2 -6144x +2048=0$　　------②

Z(2)分身たちの値を解にもつ代数方程式を並べると、それは第一種チェビシェフ多項式に対応するという興味深い事実を（その８６）で見ました。それを再掲します。６分割で②が見える。

＝＝＝

ζ(2)の分身を生む次の代数方程式に現われている左辺の多項式 f(x)は、第一種チェビシェフ多項式と“本質的に”等しい。

ζ(2)１分割⇒ $x -2=0$

ζ(2)２分割⇒ $x^2 -8x +8=0$

ζ(2)３分割⇒ $x^3 -18x^2 +48x -32=0$

ζ(2)４分割⇒ $x^4 -32x^3 +160x^2 -256x +128=0$

ζ(2)６分割⇒ $x^5 -50x^4 +400x^3 -1120x^2 +1280x -512=0$

ζ(2)６分割⇒ $x^6 -72x^5 +840x^4 -3584x^3 +6912x^2 -6144x +2048=0$

・・・・・・

上記左辺式を変数変換($x=1/t^2$)して得られる第一種チェビシェフ多項式 f(x)の y=f(x)は、チェビシェフの微分方程式 $(1- x^2)y'' -xy' + n^2y=0$ (n=0,1,2,・・)の一連の解となる。上記一連の代数方程式の根(解)は、“全て実根”であり、その解はζ(2)の分身の値（特殊値）となる。例えば $x^3 -18x^2 +48x -32=0$ の三根は、Z(2)３分身の特殊値と一致する。

＝＝＝

さて、②の方程式の解（Z(2)６分身の値）を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）は存在するでしょうか？それは存在し、次となります。($G6_{Z(2)}$ の 6 は６次を意味する)

$$G6_{Z(2)}=\begin{bmatrix} \alpha1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta1 \\ 0 & \alpha2 & 0 & 0 & \beta2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha3 & \beta3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta3 & \alpha3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta2 & 0 & 0 & \alpha2 & 0 \\ \beta1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha1 \end{bmatrix}$$

対称的な美しい形です。ここで、$\alpha1$, $\beta1$, $\alpha2$, $\beta2$, $\alpha3$, $\beta3$は以下の通りです。

$\alpha1=8(2+\sqrt{3})$, $\beta1=4(2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ ---------③-1

$\alpha2=4$, $\beta2=2\sqrt{2}$ ---------③-2

$\alpha3=8(2-\sqrt{3})$, $\beta3=4(2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ ---------③-3

このエルミート行列も、やはりこれまでの分身の行列と同じく、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっています。

よく観ると、$G6_{Z(2)}$ の成分は分身たちの基本パーツ（$\alpha1$, $\beta1$, $\alpha2$, $\beta2$, $\alpha3$, $\beta3$）になっています。例えば、分身 B1 では $B1=(\pi/24)^2(\alpha1+\beta2)$ ですから、まさにそうなっています！　対角成分以外はすべてゼロであることにも着目ください。

行列の構造は（その１０２）で見たＬ(1)６分割と同じです。分割（分解構造）を表現する行列は、Ｌ(1)とZ(2)で同じ構造となっています。

$G6_{Z(2)}$の固有方程式は、$x^6 -72x^5 +840x^4 -3584x^3 +6912x^2 -6144x +2048=0$ となり（固有値λと自明でない固有ベクトルの存在条件から得られる）、②に一致する。その六つの解（固有値）λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6は当然ながら Z(2)６分身の値に一致する。固有値と固有ベクトルを以下に示す。

固有値$\lambda_1=1/\{\cos(11\pi/24)\}^2=\alpha1+\beta1$ に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有値$\lambda_2=1/\{\cos(9\pi/24)\}^2=\alpha2+\beta2$ に対応する固有ベクトル $p_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値$\lambda_3=1/\{\cos(7\pi/24)\}^2=\alpha3+\beta3$ に対応する固有ベクトル $p_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値$\lambda_4=1/\{\cos(5\pi/24)\}^2=\alpha3-\beta3$ に対応する固有ベクトル $p_4=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_5=1/\{\cos(3\pi/24)\}^2=\alpha2-\beta2$ に対応する固有ベクトル $p_5=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\0\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_6=1/\{\cos(\pi/24)\}^2=\alpha1-\beta1$ に対応する固有ベクトル $p_6=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\0\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

ここで、$\alpha1,\ \beta1,\ \alpha2,\ \beta2,\ \alpha3,\ \beta3$は上方③-1，③-2，③-3 の値である。$p_1$，$p_2$，$p_3$，$p_4$，$p_5$，$p_6$ は固有ベクトルなので互いに直交する。固有ベクトルは、（その１０２）で見たＬ(1)６分身の $G6_{L(1)}$ の固有ベクトルと（順番は違うが）全て同じであることは注目すべき点である。

$G6_{Z(2)}$ を６分身たち B1，B2，B3，B4，B5，B6 で表現したものを示す。

$$G6_{Z(2)}=(288/\pi^2)\begin{bmatrix}B1+B6&0&0&0&0&B1-B6\\0&B2+B5&0&0&B2-B5&0\\0&0&B3+B4&B3-B4&0&0\\0&0&B3-B4&B3+B4&0&0\\0&B2-B5&0&0&B2+B5&0\\B1-B6&0&0&0&0&B1+B6\end{bmatrix}$$

分身たちで $G6_{Z(2)}$ が表現されました。例えば１行１列の成分では、$(288/\pi^2)(B1+B6)=\alpha1=8(2+\sqrt{3})$ となっている。B1 +B2 +B3 +B4 +B5 +B6＝Z(2)＝$\pi^2/8$ であることと合わせて上記を味わってください。

興味深いことに、上記行列では、左上から右下に向う対角成分では、Z(2)６分割から Z(2)３分割が得られること（あるいはその逆）を示している。これは（その１０２）の[11]で示唆したことですが、６分身から３分身が得られ、逆に３分身が６分身に分かれることを行列が表現しているのです！！
つまり６分割の６分身たち B1，B2，B3，B4，B5，B6 から３分割での「B1 +B6」と「B2 +B5」と「B3 +B4」の３分身が構成されることを示している。この面白い事実は、（その７９）ですでに観たものと同じです。

$G6_{Z(2)}$ を数値でも示しておきます。$\alpha1,\beta1,\alpha2,\beta2,\alpha3,\beta3$での表現も再掲します。

$$G6_{Z(2)}=\begin{bmatrix}8(2+\sqrt{3})&0&0&0&0&4(2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}\\0&4&0&0&2\sqrt{2}&0\\0&0&8(2-\sqrt{3})&4(2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}&0&0\\0&0&4(2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}&8(2-\sqrt{3})&0&0\\0&2\sqrt{2}&0&0&4&0\\4(2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}&0&0&0&0&8(2+\sqrt{3})\end{bmatrix}$$

$$
G6_{Z(2)}=\begin{bmatrix} \alpha 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta 1 \\ 0 & \alpha 2 & 0 & 0 & \beta 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha 3 & \beta 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta 3 & \alpha 3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta 2 & 0 & 0 & \alpha 2 & 0 \\ \beta 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 1 \end{bmatrix}
$$

ここで、$\alpha 1,\ \beta 1,\ \alpha 2,\ \beta 2,\ \alpha 3,\ \beta 3$は以下の通り。

$\alpha 1=8(2+\sqrt{3})$ ，$\beta 1=4(2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ ---------③-1

$\alpha 2=4$ ，$\beta 2=2\sqrt{2}$ ---------③-2

$\alpha 3=8(2-\sqrt{3})$ ，$\beta 3=4(2-\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ --------③-3

さらに今回は、$G6_{Z(2)}$ の逆行列 $G6_{Z(2)}^{-1}$ も求めたので以下に示します。

[$G6_{Z(2)}$ の逆行列 $G6_{Z(2)}^{-1}$]

$$
G6_{Z(2)}^{-1}=(1/4)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{(2+\sqrt{3})} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\sqrt{(2-\sqrt{3})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{(2-\sqrt{3})} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{(2+\sqrt{3})} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

$G6_{Z(2)}\ G6_{Z(2)}^{-1}=G6_{Z(2)}^{-1}\ G6_{Z(2)}$ ＝E(単位行列)となることは、手計算で容易に確認できます。

これまで Z(2), L(1)の他の分身（分割）に対しても逆行列は求めていましたが、今回の Z(2)６分割ではじめて示しました。他の場合も後に示します。

今回、Z(2)６分身（つまりζ(2)６分身）の値を固有値にもつ実対称行列 $G6_{Z(2)}$と固有ベクトルを求めることができました。$G6_{Z(2)}$の逆行列 $G6_{Z(2)}^{-1}$ も示しました。５分身までと同じく６分身の $G6_{Z(2)}$ も（逆行列 $G6_{Z(2)}^{-1}$ も）、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっていることを確認ください。

以上。

2019.5.12　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その関連の記述を変更。文字フォントを変更。