＜L(1)６分身の値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)＞ rev1.01

今回はL(1)の６分身の値を固有値に持つ実対称行列（エルミート行列）を求めます。流れでは（その１００）L(1)５分身の続きとなります。

[L(1)分割−実対称行列 予想]

「L(1)のn分身の特殊値を解にもつ代数方程式」＝「実対称行列(エルミート行列)の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

ここで“n 分身”の意味は、次のタンジェント部分分数展開式の x に m/(2n)を代入して求めた n 分割の n 個の分身たちを指す。(n は 1 以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n−1)

$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

以下、L(1)６分身の値を固有値として持つ実対称行列（エルミート行列）を求めていきます。

L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +1/9 −1/11 +1/13 −1/15 +1/17 −1/19 +1/21 −1/23 +・・＝π/4 −−−−−−①

はじめにL(1)６分身を示します。（その２１）から抜粋（tan の値は追記）。

＝＝＝

■L(1)６分割

A1＝ 1 −1/23 +1/25 −1/47 +1/49 −1/71 +・・ ＝(π/24)tan(11π/24)

A2＝1/3 −1/21 +1/27 −1/45 +1/51 −1/69 +・・＝(π/24)tan(9π/24)

A3＝1/5 −1/19 +1/29 −1/43 +1/53 −1/67 +・・＝(π/24)tan(7π/24)

A4＝1/7 −1/17 +1/31 −1/41 +1/55 −1/65 +・・ ＝(π/24)tan(5π/24)

A5＝1/9 −1/15 +1/33 −1/39 +1/57 −1/63 +・・ ＝(π/24)tan(3π/24)

A6＝1/11 −1/13 +1/35 −1/37 +1/59 −1/61 +・・＝(π/24)tan(π/24)

A1 −A2 +A3 −A4 +A5 −A6＝L(1) である。A1 ,−A2, A3, −A4, A5, −A6 がL(1)６分身である。

tan の値は以下の通り。

$\tan(11\pi/24)=2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\tan(9\pi/24)=1+\sqrt{2}$

$\tan(7\pi/24)=2-\sqrt{3}+2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\tan(5\pi/24)=-(2-\sqrt{3})+2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\tan(3\pi/24)=-1+\sqrt{2}$

$\tan(\pi/24)=-(2+\sqrt{3})+2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

＝＝＝

L(1)６分身のA1, -A2, A3, -A4, A5 -A6のtan部分を解にもつ代数方程式は（その５２）で見たように次となる。

$x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$ ------②

②は tan(11π/24), -tan(9π/24), tan(7π/24), -tan(5π/24) , tan(3π/24) , -tan(π/24)の六つを解に持つ。
A1, -A2, A3, -A4, A5 -A6 の値つまり(π/24)tan(11π/24), -(π/24)tan(9π/24), (π/24)tan(7π/24), -(π/24)tan(5π/24) , (π/24)tan(3π/24) , -(π/24)tan(π/24) の六つを解に持つ方程式を出すことも当然できますが（（その５２）で見た)、それと②は本質的に同じであり、よって②を採用します。つまりこれまでの２分身～５分身と同じ方針で進めます。まとめます。

＜L(1)６分身の値を解にもつ代数方程式＞

$x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$ ---------②

L(1)n 分身の値を解に持つ代数方程式を並べるとそれらはパスカルの三角形の数（二項係数）を係数にもつ方程式に対応します。それは（その５２）で見ましたが、再掲します。６分割で②が見える。

＝＝＝

＜１分割の分身の値を解にもつ方程式＞

$x -1=0$

＜２分割の分身たち(A1,-A2)の値を解にもつ方程式＞

$x^2 -2x -1=0$

＜３分割の分身たち(A1,-A2,A3)の値を解に持つ方程式＞

$x^3 -3x^2 -3x +1=0$

＜４分割の分身たち(A1,-A2, A3,-A4)の値を解に持つ方程式＞

$x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$

＜５分割の分身たち(A1,-A2, A3,-A4, A5)の値を解に持つ方程式＞

$x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$

＜６分割の分身たち(A1,-A2, A3,-A4, A5, -A6)の値を解に持つ方程式＞

$x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$

＝＝＝

上記の方程式は係数の並びが”パスカルの三角形”になっています。

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

さて、②の方程式の解（L(1)６分身の値）を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）は存在するでしょうか？それは存在し、次となります。(G6 の 6 は６次を表す）

$$G6_{L(1)}=\begin{bmatrix} \alpha1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta1 \\ 0 & \alpha2 & 0 & 0 & \beta2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha3 & \beta3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta3 & \alpha3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta2 & 0 & 0 & \alpha2 & 0 \\ \beta1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha1 \end{bmatrix}$$

ここで $\alpha1=2+\sqrt{3}$, $\beta1=2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, $\alpha2=-1$, $\beta2=\sqrt{2}$, $\alpha3=2-\sqrt{3}$, $\beta3=2\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ ------③

対称的な美しい形です。

このエルミート行列も、これまでの分身と同じく、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっています。

$G6_{L(1)}$ の成分は分身たちの基本パーツ（$\alpha1$, $\beta1$,$\alpha2$, $\beta2$,$\alpha3$, $\beta3$）になっていることがわかります。例えば分身 A1 では A1=(π/24)($\alpha1+\beta1$)、 分身 A2 では-A2=(π/24)($\alpha2-\beta2$)なので、まさにそうなっています！

対角成分以外はすべてゼロであることにも着目してください。$G6_{L(1)}$ の固有方程式は、固有値λと自明でない固有ベクトルの存在条件から得られ、$x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1=0$ と求まった。これは②に一致している。その六つの解（固有値）λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 は当然ながら６分身の値に一致する。固有値と固有ベクトルを以下に示す。

固有値 $\lambda_1=\tan(11\pi/24)=\alpha1+\beta1$ に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_2=-\tan(9\pi/24)=\alpha2-\beta2$ に対応する固有ベクトル $p_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_3=\tan(7\pi/24)=\alpha3+\beta3$ に対応する固有ベクトル $p_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_4=-\tan(5\pi/24)=\alpha3-\beta3$ に対応する固有ベクトル $p_4=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値λ_5= tan(3π/24)＝$\alpha2$ +$\beta2$に対応する固有ベクトル　p_5=$\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値λ_6=−tan(π/24) ＝$\alpha1$ −$\beta1$に対応する固有ベクトル　p_6=$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\alpha1$, $\beta1$,$\alpha2$, $\beta2$,$\alpha3$, $\beta3$の値は③を参照。固有ベクトルp_1，p_2，p_3，p_4，p_5，p_6は互いに直交する。
$G6_{L(1)}$ をL(1)６分身A1，-A2，A3，-A4，A5，-A6の“An”で表現すると次となる。

$$G6_{L(1)}=(12/\pi)\begin{bmatrix} A1-A6 & 0 & 0 & 0 & 0 & A1+A6 \\ 0 & A5-A2 & 0 & 0 & A2+A5 & 0 \\ 0 & 0 & A3-A4 & A3+A4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A3+A4 & A3-A4 & 0 & 0 \\ 0 & A2+A5 & 0 & 0 & A5-A2 & 0 \\ A1+A6 & 0 & 0 & 0 & 0 & A1-A6 \end{bmatrix}$$

A1 -A2 +A3 -A4+A5 -A6＝L(1)＝π/4 と合わせて、上記を味わってください。
数値でも表現しておきます。$\alpha1$, $\beta1$,$\alpha2$, $\beta2$, $\alpha3$, $\beta3$での表現も再掲します。

$$G6_{L(1)}=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} & 2\sqrt{(2-\sqrt{3})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{(2-\sqrt{3})} & 2-\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$G6_{L(1)}=\begin{bmatrix} \alpha1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta1 \\ 0 & \alpha2 & 0 & 0 & \beta2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha3 & \beta3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta3 & \alpha3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta2 & 0 & 0 & \alpha2 & 0 \\ \beta1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha1 \end{bmatrix}$$

ここで $\alpha1$＝2 +√3 ，$\beta1$=2√(2+√3) ，$\alpha2$＝-1，$\beta2$＝√2 ，$\alpha3$=2 -√3 ，$\beta3$=2√(2-√3)

今回、L(1)６分身の値を固有値にもつ実対称行列$G6_{L(1)}$と固有ベクトルが求まりました。

いろいろと予想が出るので記しておきます。（その１００）のメモを少し修正しました。
（[10]を追加した。リーマン予想は不透明なので一旦外した。）

＝＝

[1] 特別に美しい対称行列

２～５分身と同様６分身の $G6_{L(1)}$ も、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっている。特別に美しいエルミート行列である。任意のｎ分身で同様になると予想される。

[2] 対角成分以外はゼロ

Ｌ(1)２分身～６分身の行列では対角線以外の成分は全てゼロになった。ζ(2)２分身～５分身でもそうなる。任意のｎ次で対角成分以外は全てゼロになると考えられる。

[3] 足し算、引き算の世界

ゼータの分身たちが棲む世界は、足し算、引き算の世界である。例えば、Ｌ(1)６分身は、$G6_{L(1)}$ のゼロ以外の成分の足し算、引き算から作られる。

[4] 群との関連

求まった行列の固有ベクトルを対称行列になるように並べて作った行列Ｔと単位行列Ｅとの集合｛Ｔ，Ｅ｝は行列の掛け算に関して群となる。分身が棲む世界は対称性の世界であり、群が出てくるのは自然である。
巡回群、可換群。

[5] 固有方程式、スツルムリウビル型微分方程式

Ｌ(1)分身の特殊値は、パスカル三角形の数（二項係数）を係数にもつ代数方程式の解（根）に関係する。その式をパスカル固有方程式と名づける。

一方、ζ(2)分身の特殊値は、第一種チェビシェフ多項式 Tn(x)の代数方程式の解に関係する。それをチェビシェフ固有方程式と名付ける。

ｙ＝Tn(x)は“チェビシェフの微分方程式 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ (n=0,1,2,・・)の一連の解である。チェビシェフの微分方程式はスツルムリウビル(Sturm-Liouville)型微分方程式と呼ばれる微分方程式に属する。（エルミートの微分方程式、ラゲールの微分方程式、ルジャンドルの微分方程式、ベッセルの微分方程式などもスツルムリウビル型である）

Ｌ(1)パスカル固有方程式に対応する微分方程式が存在するのではないか？まだ発見できていないが、存在すると思う。Ｌ(1)パスカル固有方程式も、スツルムリウビル型の微分方程式に関係すると予想される。

パスカル固有方程式とチェビシェフ固有方程式は似ている。両方とも直交性、対称性を備える。２次体ゼータも含めて、Ｌ(χ，ｓ)ゼータの分解に関係する固有方程式の一族が存在し、それに対応する微分方程式の一族があるはずである。その微分方程式族はスツルムリウビル型になるのではないか。

[6] 逆行列

現時点でL（１）２～６分身、ξ（２）２～５分身の行列の逆行列が得られている。その逆行列も全て、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっており、対角成分以外はすべてゼロになった。逆行列はすこし後に示したい。

[7] ゼータ分解の行列は、分解(分割)の構造「倍々ゲーム」を表現する

（その８７）～（その９４）に関連。

※※※

＜ L(1)分解構造 ＞

L(1)⇒L(1)２分割の分身⇒L(1)４分割の分身⇒L(1)８分割の分身⇒L(1)１６分割の分身⇒・・・

L(1)⇒L(1)３分割の分身⇒L(1)６分割の分身⇒L(1)１２分割の分身⇒L(1)２４分割の分身⇒・・・

L(1)⇒L(1)５分割の分身⇒L(1)１０分割の分身⇒L(1)２０分割の分身⇒L(1)４０分割の分身⇒・・・

L(1)⇒L(1)７分割の分身⇒L(1)１４分割の分身⇒L(1)２８分割の分身⇒L(1)５６分割の分身⇒・・・

・・・・・・・・・・

このように、一つの分身が２つに（倍に）分解する。素数を起点として倍々ゲームで無限に分解（分岐）していく。逆に無限の彼方から見れば、(先頭行を例にとると)・・・・⇒１６分身⇒８分身⇒４分身⇒２分身⇒L(1)となっている。

※※

ゼータ分解の行列は上記の構造を表現していると考えられる。ξ(2)も同様⇒（その７６）～（その８５）。

ゼータの背後には、フラクタル的に無限に続く分岐構造（入れ子構造）がある。

[8] ガロア理論、可解群

分身たちの値は√や√√のべき根で表現される。例えば、上方での■L(1)６分割を見てください。よって、ガロア理論、可解群と関係する。これは[5]とも関係する。

[9] 任意のｎでも、２次体ゼータでも

エルミート行列（実対称行列）に関しては、L(1)やξ(2)を中心に調べているが、L(3)やξ(4)なども同じことになっているはず。さらにL（χ，ｓ）ゼータでも、同種のエルミート行列になっているはず。ここまでは１次のゼータの話。２次の楕円曲線（保型形式）ゼータではどうなっているのか？

[10] 新種の分解（分割）

（その１０１）での“追記”での考察から、ξ(2)の新種の２分身（分割級数）を発見した。“追記”では示唆しただけで、その姿は示していなかったが、具体的には次の(1-1)と(1-2)である。

$$1 + 1/9^2 + 1/11^2 + 1/19^2 + 1/21^2 + 1/29^2 + 1/31^2 + 1/39^2 + 1/41^2 + 1/49^2 + \cdots$$
$$= 4(\pi/20)^2 / \{\cos(2\pi/5)\}^2 = (\pi/20)^2 (24 + 8\sqrt{5}) \qquad \text{------(1-1)}$$

$1/3^2+1/7^2+1/13^2+1/17^2+1/23^2+1/27^2+1/33^2+1/37^2+1/43^2+1/47^2+\cdots$

$$=4(\pi/20)^2/\{\cos(\pi/5)\}^2=(\pi/20)^2(24-8\sqrt{5}) \qquad \text{------(1-2)}$$

上記分解が奇数５のζ(2)5分割の裏側にひっそりと隠れていたのである！

さらにL(1)でも同類の新種の２分身(2-1)と(2-2)を発見した。次のものである。

$1+1/9-1/11-1/19+1/21+1/29-1/31-1/39+1/41+1/49-\cdots$

$$=(\pi/10)/\cos(2\pi/5)=(\pi/10)(1+\sqrt{5}) \qquad \text{-------(2-1)}$$

$-1/3-1/7+1/13+1/17-1/23-1/27+1/33+1/37-1/43-1/47+\cdots$

$$=-(\pi/10)/\cos(\pi/5)=(\pi/10)(1-\sqrt{5}) \qquad \text{--------(2-2)}$$

要するに(1-1)と(1-2)、そして(2-1)と(2-2)は次のようになっている。

$(1-1/5^2)Z(2)=\{1+1/9^2+\cdots\}+\{1/3^2+1/7^2+\cdots\}=(1\text{-}1)+(1\text{-}2)$

$(1-1/5)L(1)=\{1+1/9-\cdots\}+\{-1/3-1/7+\cdots\}=(2\text{-}1)+(2\text{-}2)$

この事実から(1-1)と(1-2)はζ(2)の新種の２分身と言え、(2-1)と(2-2)はL(1)の新種の２分身と言える。ζ(2)の（その７６）～（その８５）と、L(1)での（その８７）～（その９４）の分解が最も本質的なものと思ってきたが、ここに来てゼータ分解はもっともっと深い構造をもっている可能性が出てきた。

[11] 行列の左上から右下に向う対角成分は上流への分解ステップを表す

ゼータ分解を表す行列の左上から右下に向う対角成分は、上流の次の分割への（元祖へ向かう）ステップを表している。例えばL(1)６分身の $G6_{L(1)}$ の対角成分A1-A6とA5-A2とA3-A4はL(1)３分身を表している！６分身⇒３分身、（その９０）参照。

＝＝＝

以上。

2019.5.6　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その関連の記述を変更。文字フォントを変更。