＜ζ(2)５分身の値を固有値として持つ実対称行列（エルミート行列）＞ rev1.01

今回はζ(2)（つまりZ(2)）の５分身の値を固有値に持つ実対称行列（エルミート行列）を求めます。

[Z(2)分割-実対称行列 予想]

「Z(2)のｎ分身の特殊値を解にもつ代数方程式」＝「実対称行列（エルミート行列）の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

ここで、“ｎ分身”の意味は、タンジェント部分分数展開式を微分した次式に、m/(2n)を代入して求めたｎ分割のｎ個の分身たちを指す。(nは１以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n−1)

$$1/(1^2-x^2)^2+1/(3^2-x^2)^2+1/(5^2-x^2)^2+\cdots=(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2)-(\pi/(8x^3))\tan(\pi x/2)$$

$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots=\pi^2/8$ は、ζ(2)と次の関係にあり、両者は本質的に等しいものです。“Z(s)”という記号は私が独自に使っているものです。

$$\begin{aligned}Z(2)&=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots\\&=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+1/7^2\cdots-(1/2^2+1/4^2+1/6^2+\cdots)\\&=\zeta(2)-(1/2^2)\zeta(2)\\&=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8\qquad\text{-------①}\end{aligned}$$

以下、Z(2)５分身の値を固有値として持つ実対称行列（エルミート行列）を求めていきます。
はじめにZ(2)５分割での５分身を示します。（その３１）から抜粋、$1/\{\cos()\}^2$の値は追記。

＝＝

■Z(2)５分割

$$B1=1+1/19^2+1/21^2+1/39^2+1/41^2+1/59^2+\cdots=(\pi/20)^2/\{\cos(9\pi/20)\}^2$$
$$B2=1/3^2+1/17^2+1/23^2+1/37^2+1/43^2+1/57^2+\cdots=(\pi/20)^2/\{\cos(7\pi/20)\}^2$$
$$B3=1/5^2+1/15^2+1/25^2+1/35^2+1/45^2+1/55^2+\cdots=(\pi/20)^2/\{\cos(5\pi/20)\}^2$$
$$B4=1/7^2+1/13^2+1/27^2+1/33^2+1/47^2+1/53^2+\cdots=(\pi/20)^2/\{\cos(3\pi/20)\}^2$$
$$B5=1/9^2+1/11^2+1/29^2+1/31^2+1/49^2+1/51^2+\cdots=(\pi/20)^2/\{\cos(\pi/20)\}^2$$

$B1+B2+B3+B4+B5=Z(2)=\pi^2/8$ である。B1, B2, B3, B4, B5がZ(2)の５分身である。

$1/\{\cos()\}^2$の値は以下の通り。

$$(20/\pi)^2B1=1/\{\cos(9\pi/20)\}^2=12+4\sqrt{5}+(\sqrt{5}+3)\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$$
$$(20/\pi)^2B2=1/\{\cos(7\pi/20)\}^2=12-4\sqrt{5}-(\sqrt{5}-3)\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$$
$$(20/\pi)^2B3=1/\{\cos(5\pi/20)\}^2=2$$
$$(20/\pi)^2B4=1/\{\cos(3\pi/20)\}^2=12-4\sqrt{5}+(\sqrt{5}-3)\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$$
$$(20/\pi)^2B5=1/\{\cos(\pi/20)\}^2=12+4\sqrt{5}-(\sqrt{5}+3)\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$$

＝＝

５分身の値 B1, B2, B3, B4, B5 の 1/{cos()}^{2} の部分の値を解にもつ代数方程式は次となります。

$$x^5 -50x^4 +400x^3 -1120x^2 +1280x -512=0 \quad ------②$$

②は 1/{cos(9π/20)}^{2}, 1/{cos(7π/20)}^{2}, 1/{cos(5π/20)}^{2}, 1/{cos(3π/20)}^{2}, 1/{cos(π/20)}^{2} の五つを解に持つ。B1, B2, B3, B4 , B5 つまり(π/20)^2/{cos(9π/20)}^{2}, (π/20)^2/{cos(7π/20)}^{2}, (π/20)^2/{cos(5π/20)}^{2}, (π/20)^2/{cos(3π/20)}^{2}, (π/20)^2/{cos(π/20)}^{2} を解にもつ方程式を出すことも当然できますが、それと②は本質的に同じなので、②を採用します。

まとめます。

＜Z(2)５分身の値を解にもつ代数方程式＞

$$x^5 -50x^4 +400x^3 -1120x^2 +1280x -512=0 \quad ------②$$

Z(2)分身たちの値を解にもつ代数方程式を並べると、それは第一種チェビシェフの多項式に対応するという興味深い事実を（その８６）で見ました。それを再掲します。５分割で②が見える。

＝＝＝

ζ(2)の分身を生む次の代数方程式に現われている左辺の多項式 f(x)は、第一種チェビシェフ多項式と“本質的に”等しい。

ζ(2)１分割⇒ $x -2=0$

ζ(2)２分割⇒ $x^2 -8x +8=0$

ζ(2)３分割⇒ $x^3 -18x^2 +48x -32=0$

ζ(2)４分割⇒ $x^4 -32x^3 +160x^2 -256x +128=0$

ζ(2)５分割⇒ $x^5 -50x^4 +400x^3 -1120x^2 +1280x -512=0$

ζ(2)６分割⇒ $x^6 -72x^5 +840x^4 -3584x^3 +6912x^2 -6144x +2048=0$

・・・・・・

上式左辺式を変数変換して得られる第一種チェビシェフ多項式 f(x)の y=f(x)は、チェビシェフの微分方程式 $(1- x^2)y'' -xy' + n^2y=0$ (n=0,1,2,・・)の一連の解となる。上記一連の代数方程式の根(解)は、“全て実根”であり、その解はζ(2)の分身の値（特殊値）となる。例えば $x^3 -18x^2 +48x -32=0$ の三根は、Z(2)３分身の特殊値と一致する。

＝＝＝

さて、②の方程式の解（Z(2)５分身の値）を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）は存在するでしょうか？それは存在し、次となります。($G5_{Z(2)}$ の５は５次を意味する)

$$G5_{Z(2)}=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

ここで、 $\alpha=12+4\sqrt{5}$, $\beta=(\sqrt{5}+3)\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$, $a=12-4\sqrt{5}$, $b=(\sqrt{5}-3)\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$ ----③
対称的な美しい形です。

このエルミート行列も、やはりこれまでの分身の行列と同じく、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっています。

$G5_{Z(2)}$ の成分は、分身たちの基本パーツ（α, β, a, b）になっていることがわかります。例えば、分身 B1 では $B1=(\pi/20)^2(\alpha+\beta)$ ですから、まさにそうですね！ 対角成分以外はすべてゼロであることにも着目ください。

この行列の構造は（その１００）で見た L(1)と同じです。分身（分解構造）を表現する行列は、L(1)と Z(2)で同じ構造となっています。

$G5_{Z(2)}$ の固有方程式は $x^5-50x^4+400x^3-1120x^2+1280x-512=0$ となり、②に一致する。その五つの解（固有値） λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 は当然ながら Z(2) ５分身の値に一致する。固有値と固有ベクトルを以下に示す。

固有値 $\lambda_1=1/\{\cos(9\pi/20)\}^2=\alpha+\beta$ に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_2=1/\{\cos(7\pi/20)\}^2=a-b$ に対応する固有ベクトル $p_2=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_3=1/\{\cos(5\pi/20)\}^2=2$ に対応する固有ベクトル $p_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_4=1/\{\cos(3\pi/20)\}^2=a+b$ に対応する固有ベクトル $p_4=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_5=1/\{\cos(\pi/20)\}^2=\alpha-\beta$ に対応する固有ベクトル $p_5=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

ここで α, β, a, b は③の値である。p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 は固有ベクトルなので互いに直交する。
これらは（その１００）で見た L(1)5 分身の実対称行列 $G5_{L(1)}$ の固有ベクトルと同じものになっています。

さて、対称行列では固有値と固有ベクトルを使って行列を表現できます。それを対称行列のスペクトル分解といいます。それを示します。

＜$G5_{Z(2)}$ のスペクトル分解＞

$$G5_{Z(2)} = \lambda_1 p_1\ p_1{}' + \lambda_2 p_2\ p_2{}' + \lambda_3 p_3\ p_3{}' + \lambda_4 p_4\ p_4{}' + \lambda_5 p_5\ p_5{}'$$

ここで、$p_1{}'$ は p_1 の転置ベクトル（横長）である。上式の成立は手計算で簡単に確認できる。

このように $G5_{Z(2)}$ が固有ベクトルによって“分解的に”表現されました。スペクトル分解は有限次のフーリエ展開のようなものと言えるかと思います。各固有ベクトルが固有値を介して各分身に対応していることに注意してください（例えば p_1 は分身 B1 に対応）。

さて、$G5_{Z(2)}$ を B1, B2, B3, B4, B5 で表現したものを示します。

$$G5_{Z(2)} = (200/\pi^2)\begin{bmatrix} B1+B5 & 0 & 0 & 0 & B1-B5 \\ 0 & B2+B4 & 0 & B4-B2 & 0 \\ 0 & 0 & B3+B3 & 0 & 0 \\ 0 & B4-B2 & 0 & B2+B4 & 0 \\ B1-B5 & 0 & 0 & 0 & B1+B5 \end{bmatrix}$$

分身たちによって $G5_{Z(2)}$ が表現されました。例えば１行１列の成分では $(200/\pi^2)(B1+B5)=\alpha$ となっています。B1 +B2 +B3 +B4 +B5＝Z(2)＝$\pi^2/8$ であることと合わせて上記を味わってください。行列の真ん中の成分は“2B3”とせず、あえて<u>“B3+B3”としました</u>。

$G5_{Z(2)}$ を数値でも示しておきます。α, β, a, b での表現も再掲します。

$$G5_{Z(2)} = \begin{bmatrix} 12+4\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & (\sqrt{5}+3)\sqrt{(10+2\sqrt{5})} \\ 0 & 12-4\sqrt{5} & 0 & (\sqrt{5}-3)\sqrt{(10-2\sqrt{5})} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{5}-3)\sqrt{(10-2\sqrt{5})} & 0 & 12-4\sqrt{5} & 0 \\ (\sqrt{5}+3)\sqrt{(10+2\sqrt{5})} & 0 & 0 & 0 & 12+4\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$G5_{Z(2)} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

ここで、 $\alpha=12+4\sqrt{5}$, $\beta=(\sqrt{5}+3)\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$, $a=12-4\sqrt{5}$, $b=(\sqrt{5}-3)\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

今回、Z(2)５分身（つまりζ(2)５分身）の値を固有値にもつ実対称行列 $G5_{Z(2)}$ と固有ベクトルを求めることができました。４分身までと同じく５分身の $G5_{Z(2)}$ も、<u>右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称（当然エルミート行列である）</u>ことを確認ください。

以上。

2019.4.28　杉岡幹生

追記

　この原稿を書き終えて $G5_{Z(2)}$ を眺めていたら、気づいていなかった別種の分解（分割）が存在していることに気づきました（対角成分を見ていて気づいた）。ゼータの分解を表現した実対称行列(エルミート行列)はとてつもなく重要です。ゼータの秘密が詰まっている気がします。

　求めている実対称行列は“明示的な特殊値の分解”を表現しています。明示的な特殊値（例えば、ζ(2)やL(1)など）が自明な零点に関係していることは、かつてテイラーシステムを使って行った研究から分かっています。零点領域には究極の対称性が存在しており、それが行列の対角成分に埋め込まれているような気がします。

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その関連の記述を変更。文字フォントを変更。