＜L(1)5分身の値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)＞ rev1.01

今回はL(1)の５分身の値を固有値に持つ実対称行列（エルミート行列）を求めます。（その９７）の４分身からの続きです。

[L(1)分割-実対称行列 予想]

「L(1)のn分身の特殊値を解にもつ代数方程式」＝「実対称行列(エルミート行列)の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

ここで“n 分身”の意味は、次のタンジェント部分分数展開式の x に m/(2n)を代入して求めた n 分割の n 個の分身たちを指す。(n は 1 以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n-1)

$1/(1^2-x^2) +1/(3^2-x^2) +1/(5^2-x^2) +\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

以下、L(1)５分身の値を固有値として持つ実対称行列（エルミート行列）を求めていきます。

$L(1)=1 -1/3 +1/5 -1/7 +\cdots=\pi/4$

はじめにL(1)５分身を示します。（その２８）から抜粋(一部追記)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■L(1)５分割

$A1= 1 -1/19 +1/21 -1/39 +1/41 -1/59 + \cdots=(\pi/20)\tan(9\pi/20)$

$A2=1/3 -1/17 +1/23 -1/37 +1/43 -1/57 +\cdots=(\pi/20)\tan(7\pi/20)$

$A3=1/5 -1/15 +1/25 -1/35 +1/45 -1/55 +\cdots=(\pi/20)\tan(5\pi/20)$

$A4=1/7 -1/13 +1/27 -1/33 +1/47 -1/53 +\cdots=(\pi/20)\tan(3\pi/20)$

$A5=1/9 -1/11 +1/29 -1/31 +1/49 -1/51 +\cdots=(\pi/20)\tan(\pi/20)$

$A1 -A2 +A3 -A4 +A5=L(1)$ である。A1, -A2, A3, -A4, A5 がL(1)の５分身である。tan()の値は以下の通り。

$\tan(9\pi/20)= 1 +\sqrt{5} +\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$\tan(7\pi/20)=-1 +\sqrt{5} +\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

$\tan(5\pi/20)= 1$

$\tan(3\pi/20)=-1 +\sqrt{5} -\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

$\tan(\pi/20) = 1 +\sqrt{5} -\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)５分身のA1, -A2, A3,-A4,A5のtan()部分を解にもつ代数方程式は（その５２）で見たように次となる。

$x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x -1=0$ ------②

②は$\tan(9\pi/20)$, $-\tan(7\pi/20)$, $\tan(5\pi/20)$, $-\tan(3\pi/20)$, $\tan(\pi/20)$の五つを解に持つ。

A1, -A2, A3, -A4, A5すなわち、$(\pi/20)\tan(9\pi/20)$, $-(\pi/20)\tan(7\pi/20)$, $(\pi/20)\tan(5\pi/20)$, $-(\pi/20)\tan(3\pi/20)$, $(\pi/20)\tan(\pi/20)$の五つを解に持つ方程式を出すことも当然できますが（（その５２）で見た)、それと②は本質的に同じであり、よって②を採用します。つまりこれまでの２～４分身と同じ方針で進めます。

まとめます。

＜L(1)５分身の値を解にもつ代数方程式＞

$$x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0 \quad \text{------②}$$

（その９６）での２分身、３分身、（その９７）の４分身、さらにそれ以降の代数方程式を並べるとそれらはパスカルの三角形の数を係数にもつ方程式に対応します。それは（その５２）で見ましたが、再掲します。

５分割で②が見える。

＝＝＝

＜１分割の分身の値を解にもつ方程式＞

$x-1=0$

＜２分割の分身たち(A1,-A2)の値を解にもつ方程式＞

$x^2-2x-1=0$

＜３分割の分身たち(A1,-A2,A3)の値を解に持つ方程式＞

$x^3-3x^2-3x+1=0$

＜４分割の分身たち(A1,-A2, A3,-A4)の値を解に持つ方程式＞

$x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$

＜５分割の分身たち(A1,-A2, A3,-A4, A5)の値を解に持つ方程式＞

$x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$

＜６分割の分身たち(A1,-A2, A3,-A4, A5, -A6)の値を解に持つ方程式＞

$x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1=0$

得られた上記方程式は係数の並びが”パスカルの三角形”になっている。

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

＝＝＝

さて、②の方程式の解（L(1)５分身の値）を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）は存在するでしょうか？それは存在し、次となります。(G5 の 5 は５次を表す)

$$G5_{L(1)}=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

ここで、$\alpha=1+\sqrt{5}$, $\beta=\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$, 　$a=1-\sqrt{5}$, $b=\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$ 　------③

美しい形です。この形はゼータ分解構造に潜む際立った対称性を表現していると考えられます。
このエルミート行列も、やはりこれまでの分身の行列と同じく、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっています。さらに対角線以外はすべてゼロになっている！

$G5_{L(1)}$ の固有方程式は $x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$ であり、②に一致する。その五つの解（固有値）λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 は当然ながら L(1)５分身の値に一致する。固有値と固有ベクトルを以下に示す。

固有値 $\lambda_1=\tan(9\pi/20)=\alpha+\beta$ に対応する固有ベクトル　$p_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_2=-\tan(7\pi/20)=a-b$ に対応する固有ベクトル　$p_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_3=\tan(5\pi/20)=1$ に対応する固有ベクトル　$p_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_4=-\tan(3\pi/20)=a+b$ に対応する固有ベクトル　$p_4=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda_5=\tan(\pi/20)=\alpha-\beta$ に対応する固有ベクトル　$p_5=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

α, β, a, b の値は③に示した通りです。固有ベクトル p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 は互いに直交しています。

$G5_{L(1)}$ をＬ(1)５分身 A1, A2, A3, A4, A5 で表現すると次となる。

$$G5_{L(1)}=(10/\pi)\begin{bmatrix} A1+A5 & 0 & 0 & 0 & A1-A5 \\ 0 & -A2-A4 & 0 & A2-A4 & 0 \\ 0 & 0 & 2A3 & 0 & 0 \\ 0 & A2-A4 & 0 & -A2-A4 & 0 \\ A1-A5 & 0 & 0 & 0 & A1+A5 \end{bmatrix}$$

Ｌ(1)５分身たち A1, -A2, A3, -A4, A5 によって見事に表現されました。
A1 -A2 +A3 -A4+A5＝L(1)＝$\pi/4$ と合わせて、上記を味わってください。

数値でも表現しておきます。（α, β での表現も再掲）

$$G5_{L(1)}=\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{(5+2\sqrt{5})} \\ 0 & 1-\sqrt{5} & 0 & \sqrt{(5-2\sqrt{5})} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{(5-2\sqrt{5})} & 0 & 1-\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{(5+2\sqrt{5})} & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$G5_{L(1)}=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

ここで、α＝1＋√5, β＝√(5＋2√5), a＝1-√5, b＝√(5 -2√5)

以上。

このようにＬ(1)５分身の値を固有値にもつ実対称行列 $G5_{L(1)}$ と固有ベクトルが求まりました。

いろいろと予想や疑問が出てきているのでメモしておきます。

＝＝＝

① 特別に美しい実対称行列

２～４分身と同じく、５分身の $G5_{L(1)}$ も右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっている。特別に美しい実対称行列（エルミート行列）である。任意の n 分身でもそうなるはずである。

② 対角線以外はすべてゼロ

L(1) ２分身～５分身の行列では対角線以外の成分は全てゼロになった。ξ(2) ２分身～４分身でもそうなった。まだ示していないが、ξ(2) ５分身でもそうなる。任意のｎ次で、対角線以外の成分は全てゼロになると考えられる。

③ 足し算、引き算の世界

ゼータの分身たちが棲む世界は、足し算、引き算の簡単な世界である。例えば、L(1) ５分身の $G5_{L(1)}$ では、ゼロ以外の成分の足し算、引き算でゼータの分身たちが作られる。$G5_{L(1)}$ をよーく見てください。

④ 群との関連

ゼータ分割の行列の固有ベクトルを対称行列になるように並べて作った行列Ｔと単位行列Ｅとの集合｛Ｔ，Ｅ｝は行列の掛け算に関して群となる。分身が棲む世界は対称性の世界であり、群が出てくるのは自然である。巡回群、可換群。

⑤ 固有方程式、微分方程式

L(1)分身は、パスカル三角形の数を係数にもつ固有方程式（代数方程式）に関係する。その式をパスカル固有方程式と名づける。

一方、ξ(2)分身は第一種チェビシェフ多項式の方程式に関係する。それをチェビシェフ固有方程式と名付ける。なお、第一種チェビシェフ多項式はチェビシェフ微分方程式の解である。

L(1)のパスカルの方にも、対応する微分方程式が存在するのではないか？　まだ発見できていないのだが、存在するような気がする。

パスカル固有方程式とチェビシェフ固有方程式は似ている。兄弟である。両方とも直交性、対称性を生み出す。両者は同族の方程式として分類されるはずである。今後見ていく２次体ゼータのケースも含めて、ゼータ分解（分身たち）に関係する固有方程式の一族が存在するはずである。

同様に、ゼータ分解に対応する微分方程式の一族もあるかもしれない。

⑥ 逆行列

まだ示していないが、現時点でＬ（１）２～５分身、ξ（２）２～４分身の行列の逆行列が得られている。
その逆行列も全て、右下方向への対角線に対して対称であり、且つ左下方向への対角線に対しても対称となっており（当然エルミート行列）、対角線以外はゼロになった。

⑦ リーマン予想との関連？

分身とエルミート行列との関連を数学仲間に伝えたとき、リーマン予想との関連を指摘された。それはモンゴメリーの予想「ゼータ関数の非自明零点の分布とランダムエルミート行列の固有値の分布は一致する」に関してであった。

私は、また違う観点からゼータ分解とリーマン予想との関連を思っている。それはどんな観点か？
以前私は、Ｌ（χ，ｓ）ゼータの値が任意の実数点で求められるテイラーシステムという手法を開発した。それを使うと、例えばξ(s)では、なぜξ(2)、ξ(4)・・のみが明示的にきっちりと求まるかの理由（原因）がわかる。その原因は自明な零点にあった。

ゼータ分解は、ζ(2)、ζ(4)・・など明示的な特殊値の分解（分割）に関係する。よって上記考察から分身たちはゼータの自明な零点と関係している（ζ(-2)、ζ(-4)・・が自明な零点)。さて、リーマン予想は、非自明な零点に関係する。これらから、ゼータ分身とリーマン予想は、零点という観点でつながりがある・・？

⑧ ゼータ分解の行列は、分身世界の構造「倍々ゲーム」を表現する

（その８７）～（その９４）に関連。

※※※

＜ L(1)分解構造 ＞

L(1)⇒L(1)２分割の分身⇒L(1)４分割の分身⇒L(1)８分割の分身⇒L(1)１６分割の分身⇒・・・

L(1)⇒L(1)３分割の分身⇒L(1)６分割の分身⇒L(1)１２分割の分身⇒L(1)２４分割の分身⇒・・・

L(1)⇒L(1)５分割の分身⇒L(1)１０分割の分身⇒L(1)２０分割の分身⇒L(1)４０分割の分身⇒・・・

L(1)⇒L(1)７分割の分身⇒L(1)１４分割の分身⇒L(1)２８分割の分身⇒L(1)５６分割の分身⇒・・・

・・・・・・・・・・

このように、一つの分身が２つに（倍に）分解する。素数を起点として倍々ゲームで無限に分解（分岐）していく。逆に無限の彼方から見れば、(先頭行を例にとると)・・・・⇒１６分身⇒８分身⇒４分身⇒２分身⇒L(1)となっている。

※※

求めた分身の行列は上記のことを表現していると考えられる。ζ(2)も同様⇒（その７６）～（その８５）。

ゼータの背後には、フラクタル的に無限に続く分岐構造（入れ子構造）があるのである。

⑨ ガロア理論、可解群

分身たちの値は、√や√√のべき根で表現される(例えば、上方の■L(1)５分割を見てください)。よって、ガロア理論、可解群と関係する。これは⑤の固有方程式とも関係する。

⑩ 任意のｎでも、２次体ゼータでも

エルミート行列（実対称行列）に関しては、L(1)やζ(2)を中心に調べているが、L(3)やζ(4)なども同じことになっているはず。さらにL(χ，s)の２次体ゼータでもエルミート行列になっているはず。ここまでは１次のゼータの話。２次の楕円曲線ゼータではどうなっているのか？

＝＝＝

ゼータ分解(分割)の領域は一大鉱脈であって、長きにわたって調べるに値する領域と思います。私ごときが、進めても進展が遅い・・。読者でなにか気づかれた場合は、お知らせください。紹介させていただきます。

以上。

2019.4.13　杉岡幹生(sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp)

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その関連の記述を変更。文字フォントを変更。